Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße

Von Florian Modler

In diesem Artikel möchte ich einen kleinen weiteren Exkurs zu meiner Serie „Vier Wahrscheinlichkeitsverteilungen“ geben und klären, was man generell unter einer Zufallsgröße versteht. Schließlich werde ich weiterhin darauf eingehen, wie der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße definiert sind.

Was ist eine Zufallsgröße und was genau deren Verteilung?

Um diese Frage zu klären, behandeln wir ein einführendes erstes Beispiel, das mir ebenfalls in meiner Schulzeit (die noch gar nicht so lange her ist :D) selbst begegnet ist und das den Begriff Zufallsgröße bzw. deren Verteilung sehr gut erläutert. Ich bitte auf die Literatur zu achten.

Zwei Würfel (ein roter und ein blauer) werden je 300-mal geworfen; die absoluten Häufigkeiten für die einzelnen Ergebnisse sind in der Tabelle 1 eingetragen.

Berechne aus der Tabelle die absoluten und relativen Häufigkeiten, mit denen die verschiedenen Augensummen auftraten.

Vergleiche die relativen Häufigkeiten mit der Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen zweier Würfel die Augensumme 2, 3, 4, ..., 12 auftritt. Stelle beide Verteilungen mit Hilfe eines Histogramms (Säulendiagramm) dar.

		blauer Würfel					
		⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
roter Würfel	⚀	10	4	6	5	7	9
	⚁	9	5	8	13	6	15
	⚂	8	9	7	7	8	8
	⚃	11	5	8	5	6	9
	⚄	15	9	5	13	1	9
	⚅	12	13	7	13	8	7

Tab. 1 [1]

Die Augensumme 2 ergibt sich, wenn beide Würfel die Augenzahl 1 zeigen, das heißt beim Ergebnis (1;1). Augensumme 3 entstand bei den Ergebnissen (2;1) und (1;2). Mit diesen Überlegungen lässt sich folgende Tabelle 2 aufstellen:

Zugehörige Ergebnisse	Augen-summe	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
(1;1)	2	10	0,033	$\frac{1}{36} \approx 0{,}028$
(1;2), (2;1)	3	13	0,043	$\frac{2}{36} \approx 0{,}056$
(1;3);(2;2);(3;1)	4	19	0,063	$\frac{3}{36} \approx 0{,}083$
(1;4);(2;3);(3;2);(4;1)	5	33	0,110	$\frac{4}{36} \approx 0{,}111$
(1;5);(2;4);(3;3);(4;2);(5;1)	6	47	0,157	$\frac{5}{36} \approx 0{,}139$
(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)	7	51	0,170	$\frac{6}{36} \approx 0{,}167$
(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)	8	46	0,153	$\frac{5}{36} \approx 0{,}139$
(3;6);(4;5);(5;4);(6;3)	9	34	0,113	$\frac{4}{36} \approx 0{,}111$
(4;6);(5;5);(6;4)	10	23	0,077	$\frac{3}{36} \approx 0{,}083$
(5;6);(6;5)	11	17	0,057	$\frac{2}{36} \approx 0{,}056$
(6;6)	12	7	0,023	$\frac{1}{36} \approx 0{,}028$

Tab. 2

Das entsprechende Histogramm für die relative Häufigkeit und für die Wahrscheinlichkeit sieht wie folgt aus (schwarz: relative Häufigkeiten, blau: Wahrscheinlichkeiten):

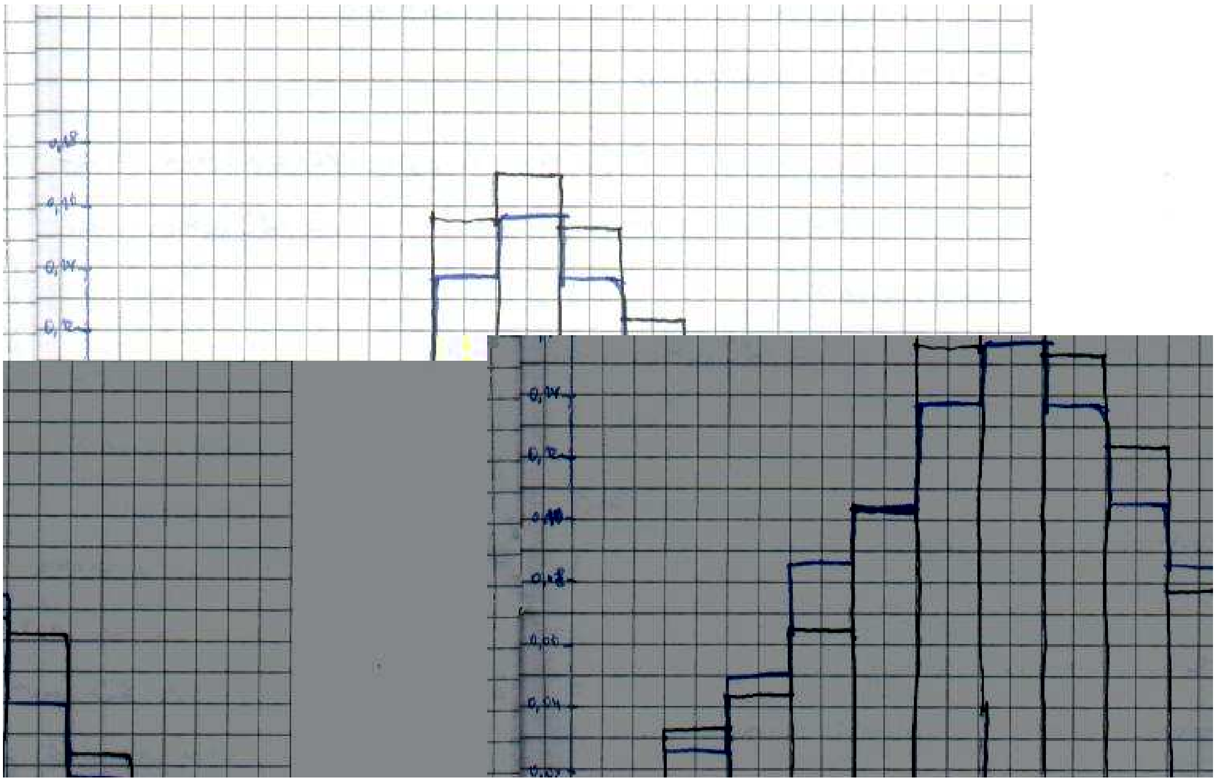

Abb. 1 Entsprechendes Histogramm (gezeichnet)

In diesem Beispiel wurden jedem der 6²=36 Ergebnisse des Zufallsversuches eine reelle Zahl zugeordnet, nämlich die Augensumme.
Dem Ergebnis (5;2) zum Beispiel wurde die Augensumme 7 zugeordnet. Das heißt jedem Ergebnis wird genau eine Zahl zugeordnet. Damit ist die Bedingung für eine Funktion erfüllt.
Und man nennt solche Funktionen, mit der ein zum Zufallsversuch gehörendes, quantitatives Merkmal betrachtet wird, eine <u>Zufallsgröße</u>.

Man beschreibt die Zufallsgrößen mit großen Buchstaben (meistens X, Y und Z). So gibt X=5 das Ereignis Augensumme gleich 5 an.

Weiterhin wurde in dem Beispiel jedem der Ereignisse X=2, X=3, ..., X=12 eine Wahrscheinlichkeit $P(X=2)=\frac{1}{36}; P(X=3)=\frac{2}{36},..., P(X=12)=\frac{1}{36}$ zugeordnet.
Eine Funktion, die jedem Wert einer Zufallsgröße eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße</u>.

Fassen wir unsere Ergebnisse nochmals zusammen:

Eine <u>Zufallsgröße</u> ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eine reelle Zahl zuordnet. Zu jedem Ergebnis eines solchen Zufallversuchs gehört ein Wert der Zufallsgröße.

Jeder Wert der Zufallsgröße tritt mit einer Wahrscheinlichkeit auf. So entsteht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße.

Die mathematische Definition will ich euch nicht vorenthalten:

Definition:

Die Funktion $X: \omega \to X(\omega) := x$ mit $\omega \in \Omega$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt Zufallsgröße auf Ω.

Eine Funktion $W: x \to (\{\omega \mid X(\omega) = x\}) := P(X = x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P(X = x) \in [0;1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X.

Wir behandeln ein zweites Beispiel:

Brigitte bietet Karin folgendes Spiel an: Karin darf eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 nennen und leistet 1 Euro Einsatz. Ein mit den vier Zahlen beschrifteter Tetraeder wird viermal geworfen, wobei jeweils die unten liegende Zahl als geworfen gilt.

Wird die von Karin genannte Zahl nicht geworfen, verfällt der Einsatz, das heißt sie verliert 1 Euro. Für jeden Wurf, der ihre Zahl zeigt, bekommt sie von Brigitte 1 Euro.

Lösung:

Jedem möglichen Ergebnis wird als Zufallsgröße der Reingewinn von Karin zugeordnet. Damit ergibt sich für die Zufallsgröße X folgende Wertetabelle:

ω	1111	1112	1113	...	1122	1123	...	1144	1222	1223	...
$X(\omega)$	3	2	2	...	1	1	...	1	0	0	...

Tab. 3

Wir definieren das Ereignis:

K_i : "Die von Karin genannte Zahl wird i-mal geworfen.", wobei $i \in \{0,1,2,3,4\}$

Für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gilt mit kombinatorischen Überlegungen:

$$P(K_0) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}; P(K_1) = \frac{\binom{4}{1}3^3}{4^4} = \frac{108}{256}; P(K_2) = \frac{\binom{4}{2}3^2}{4^4} = \frac{54}{256};$$

$$P(K_3) = \frac{\binom{4}{3}3}{4^4} = \frac{12}{256}; P(K_4) = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

Weiterhin schreibt man mit entsprechender Zufallsgröße:

$P(K_0) = P(X = -1); (K_2) = P(X = 0), \ldots$

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße

Bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen interessiert man sich oft für den Wert, den die Zufallsgröße im Durchschnitt annehmen kann. Man erhält daher den Mittelwert, indem man die einzelnen Werte der Zufallsgröße mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet und addiert.

Diesen Wert bezeichnet man mit Erwartungswert und dieser ist wie folgt definiert:

Erwartungswert:
Die Zufallsgröße X habe die Wertemenge $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Dann heißt die Zahl

$$E(X) := \mu := \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet P(X = x_i) = x_1 \bullet P(X = x_1) + x_2 \bullet P(X = x_2) + ... + x_n \bullet P(X = x_n)$$

heißt Erwartungswert.

Beispiel am Würfel (einführendes erstes Beispiel):

Wir wollen den Erwartungswert am Beispiel unseres Würfels berechnen:

$$E(X) = \mu = 2 \bullet \frac{1}{36} + 3 \bullet \frac{2}{36} + 4 \bullet \frac{3}{36} + 5 \bullet \frac{4}{36} + 6 \bullet \frac{5}{36} + 7 \bullet \frac{6}{36} + 8 \bullet \frac{5}{36} + 9 \bullet \frac{4}{36}$$
$$+ 10 \bullet \frac{3}{36} + 11 \bullet \frac{2}{36} + 12 \bullet \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7,0$$

Beispiel am Tetraeder (zweites Beispiel):

Als weitere Übung berechnen wir den Erwartungswert am Beispiel des Tetraeders. Wir können damit die Frage klären, wie viel Gewinn oder Verlust Karin im Mittel bzw. im Durchschnitt machen wird und ob das Spiel gerecht, also fair ist.

$$E(X) = \mu = -1 \bullet \frac{81}{256} + 0 \bullet \frac{108}{256} + 1 \bullet \frac{54}{256} + 2 \bullet \frac{12}{256} + 3 \bullet \frac{1}{256} = 0$$

Das Spiel ist also absolut fair. Auf langer Sicht ist mit keinem Gewinn, aber auch mit keinem Verlust zu rechnen.

Noch ein drittes Beispiel, für das wir nochmals eine Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben und den Erwartungswert berechnen wollen:

Peter setzt beim Roulette in Las Vegas 1 Dollar auf „carre“ (4 zahlen, die ein Quadrat bilden). Robert setzt 1 Dollar auf „impair“ (alle ungeraden Zahlen). Der Gewinn von Peter sei die Zufallsgröße X, von Robert die Zufallsgröße Z. Gib für X und Z jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert an.

Peter:

x	-1	8
P(X=x)	$\frac{33}{37}$	$\frac{4}{37}$

Tab. 4

Zur Erläuterung: Die Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße "Gewinn" ($P(X=8)$) ist natürlich $\frac{4}{37}$, da er 4 bestimmte Zahlen nennt und 37 mögliche Zahlen auftreten können.
Die Wahrscheinlichkeit für den Verlust, also zu verlieren ($P(X=-1)$) ist
$1-\frac{4}{37}=\frac{33}{37}$.

Der Erwartungswert ist damit:

$$E(X)=-1\bullet\frac{33}{37}+8\bullet\frac{4}{37}=-\frac{1}{37}$$

Robert:

z	-1	1
P(Z=z)	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Tab. 5

Zur Erläuterung: Die Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße "Gewinn" ($P(X=1)$) ist natürlich $\frac{18}{37}$, da es 18 ungerade Zahlen gibt und 37 mögliche Zahlen auftreten können.
Die Wahrscheinlichkeit für den Verlust, also zu verlieren ($P(X=-1)$) ist
$1-\frac{18}{37}=\frac{19}{37}$.

Der Erwartungswert ist damit:

$$E(X)=-1\bullet\frac{19}{37}+1\bullet\frac{18}{37}=-\frac{1}{37}$$

Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße

Unter der Varianz versteht man eine Zahl, die angibt, wie stark die einzelnen Werte der Zufallsgröße X von ihrem Erwartungswert E(X) abweichen, wie weit die Werte also von X streuen. Eine andere wörtliche Definition ist die Beschreibung der Varianz als „mittleres Abweichungs –oder Streuungsquadrat."

Varianz und Standardabweichung:

Eine Zufallsgröße X mit $E(X)=\mu$ und der Wertemenge $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ heißt

$Var(X) := E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \bullet P(X = x_i)$ Varianz ("mittleres Abweichungs -oder Streuungsquadrat") der Zufallsgröße X.

$\sigma(X) := \sqrt{Var(X)}$ heißt Standardabweichung oder Streuung von X.

Durch das Quadrat bei der Definition zur Varianz sorgt man dafür, dass (1) keine negativen Ergebnisse auftreten können und (2) Daten, die besonders stark vom Mittelwert (Erwartungswert) abweichen, stärker ins Gewicht fallen, als diejenigen, die in der Nähe des Erwartungswerts liegen.

Die Formel ist erst einmal nicht handfest, damit wir sie handfester bekommen, behandeln wir einfach ein paar Beispiele:

<u>1. Beispiel: Varianz und Streuungsabweichung am Beispiel des Würfels</u>

Wir berechnen die Varianz und die Streuungsabweichung an unserem Beispiel mit den beiden Würfeln.

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \bullet P(X = x_i) = (2-7)^2 \bullet \frac{1}{36} + (3-7)^2 \bullet \frac{2}{36}$$
$$+(4-7)^2 \bullet \frac{3}{36} + (5-7)^2 \bullet \frac{4}{36} + (6-7)^2 \bullet \frac{5}{36} + (7-7)^2 \bullet \frac{6}{36} + (8-7)^2 \bullet \frac{5}{36} + (9-7)^2 \bullet \frac{4}{36}$$
$$+(10-7)^2 \bullet \frac{3}{36} + (11-7)^2 \bullet \frac{2}{36} + (12-7)^2 \bullet \frac{1}{36}$$
$$= \frac{25+32+27+16+5+0+5+16+27+32+25}{36} = \frac{210}{36} = 5\frac{30}{36} = 5\frac{5}{6} \text{ (Varianz)}$$

Die Standardabweichung ist damit $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{5\frac{5}{6}} = 2,4152$

2. Beispiel: Varianz und Streuungsabweichung am Beispiel von „Schulaufgabennoten“

Wir behandeln ein zweites Beispiel, das wir neu einführen:

Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße „Schulaufgabennote“ in zwei verschiedenen Klassen:

x bzw. y	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	0,075	0,0125	0,040	0,03	0,075	0,025
P(Y=y)	0,2	0,25	0,125	0,125	0,125	0,175

Tab. 6

Wir berechnen die entsprechenden Erwartungswerte:

$$E(X) = 1 \bullet \frac{3}{40} + 2 \bullet \frac{5}{40} + 3 \bullet \frac{16}{40} + 4 \bullet \frac{12}{40} + 5 \bullet \frac{3}{40} + 6 \bullet \frac{1}{40} = 3,25$$

$$E(Y) = 1 \bullet \frac{8}{40} + 2 \bullet \frac{10}{40} + 3 \bullet \frac{5}{40} + 4 \bullet \frac{5}{40} + 5 \bullet \frac{5}{40} + 6 \bullet \frac{7}{40} = 3,25$$

Die Varianz und die Standardabweichung berechnet sich wie folgt:

$$Var(X) = (1-3,25)^2 \bullet \frac{3}{40} + (2-3,25)^2 \bullet \frac{5}{40} + (3-3,25)^2 \bullet \frac{16}{40} + (4-3,25)^2 \bullet \frac{12}{40} +$$

$$(5-3,25)^2 \bullet \frac{3}{40} + (6-3,25)^2 \bullet \frac{1}{40} = 1,1875$$

$$Var(Y) = (1-3,25)^2 \bullet \frac{8}{40} + (2-3,25)^2 \bullet \frac{10}{40} + (3-3,25)^2 \bullet \frac{5}{40} + (4-3,25)^2 \bullet \frac{5}{40} +$$

$$(5-3,25)^2 \bullet \frac{5}{40} + (6-3,25)^2 \bullet \frac{7}{40} = 3,1875$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 1,09 \text{ und } \sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = 1,79$$

Trotz gleichem Erwartungswert gibt es aber erhebliche Unterschiede in der Varianz bzw. in den Standardabweichungen. Das bedeutet, dass die Chance, bei Klasse y jemanden herauszugreifen, der eine 1 geschrieben hat (also stark vom Erwartungswert abweicht) höher ist, als jemanden, der eine 3 geschrieben hat (also sehr in der Nähe des Erwartungswertes liegt). Anders ist dies bei der Klasse x.

3. Beispiel: Varianz und Standardabweichung am Beispiel des Roulettes:

Wir hatten ja oben schon folgendes Beispiel:

Aufgabe: Peter setzt beim Roulette in Las Vegas 1 Dollar auf „carre“ (4 zahlen, die ein Quadrat bilden). Robert setzt 1 Dollar auf „impair“ (alle ungeraden Zahlen). Der Gewinn von Peter sei die Zufallsgröße X, von Robert die Zufallsgröße Z.

Gib für X und Z jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung an.

Lösung:

Peter:

x	-1	8
P(X=x)	$\frac{33}{37}$	$\frac{4}{37}$

Tab. 7

Zur Erläuterung: Die Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße "Gewinn" ($P(X=8)$) ist natürlich $\frac{4}{37}$, da er 4 bestimmte Zahlen nennt und 37 mögliche Zahlen auftreten können.
Die Wahrscheinlichkeit für den Verlust, also zu verlieren ($P(X=-1)$) ist
$1-\frac{4}{37}=\frac{33}{37}$.

Der Erwartungswert ist damit:

$$E(X)=-1\bullet\frac{33}{37}+8\bullet\frac{4}{37}=-\frac{1}{37}$$

$$Var(X)=(-1+\frac{1}{37})^2\bullet\frac{33}{37}+(8+\frac{1}{37})^2\bullet\frac{4}{37}=7,81$$

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=2,79$$

Robert:

y	-1	1
P(Y=y)	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Tab. 8

Zur Erläuterung: Die Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße "Gewinn" ($P(X=1)$) ist natürlich $\frac{18}{37}$, da es 18 ungerade Zahlen gibt und 37 mögliche Zahlen auftreten können.
Die Wahrscheinlichkeit für den Verlust, also zu verlieren ($P(X=-1)$) ist
$1-\frac{18}{37}=\frac{19}{37}$.

Der Erwartungswert ist damit:

$$E(X)=-1\bullet\frac{19}{37}+1\bullet\frac{18}{37}=-\frac{1}{37}$$

$$Var(Y)=(-1+\frac{1}{37})^2\bullet\frac{19}{37}+(1+\frac{1}{37})^2\bullet\frac{18}{37}=1,0$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{Var(X)}=1,00$$

Wie die Streuung zeigt, geht Peter ein größeres Risiko als Robert ein. Er gewinnt mit geringerer Wahrscheinlichkeit, dann aber relativ viel.

Der übereinstimmende Erwartungswert zeigt aber auch, dass beide im langfristigen Mittel mit demselben Verlust pro Spiel rechnen müssen, nämlich $\frac{1}{37}$ ihres Einsatzes.

Noch ein abschließendes Beispiel:

Ein ungewöhnlicher Laplace - Würfel trägt auf seinen sechs Flächen die Zahlen 2, 2, 2, 2, 5, 5. Die Zufallsgröße X bezeichne die beim einmaligen Werfen des Würfels geworfene Augenzahl.

a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X tabellarisch dar.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung sieht tabellarisch wie folgt aus:

x	2	5
P(X=x)	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

Tab. 9

b)

$$E(X) = 2 \bullet \frac{4}{6} + 5 \bullet \frac{2}{6} = \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} = 3,0$$

$$Var(X) = (2-3)^2 \bullet \frac{4}{6} + (5-3)^2 \bullet \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8}{6} = \frac{12}{6} = 2,0$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2} = 1,41$$

Außerdem gelten für die Zufallsgröße X und die Konstante $a \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften der Varianz, die ohne Beweis angeführt werden:

$$Var(a) = 0$$
$$Var(X + a) = Var(X)$$
$$Var(aX) = a^2 \bullet Var(X)$$
$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \text{ mit } \mu = E(X)$$

Abschluss

Ich hoffe nun sind alle Begriffe geklärt. Und diese Begriffe (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung) gibt es auch bei der Binomialverteilung, die ich euch bestimmt noch einmal in einem extra Artikel präsentieren werde.

Euer

Florian Modler

Literatur

Beispiele aus:

[1] Elemente der Mathematik, Stochastik, Schroedel-Verlag:

http://www.amazon.de/Elemente-Mathematik-Sekundarstufe-Leistungskurs-Schleswig-Holstein/dp/3507839385/ref=pd_bbs_sr_1/303-4135329-5457827?ie=UTF8&s=books&qid=1186650280&sr=8-1

[2] Abi – Countdown, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leistungskurs

http://www.amazon.de/Abi-Countdown-Wahrscheinlichkeitsrechnung-Leistungskurs-Franz-Kestler/dp/3786330212/ref=sr_1_1/028-7580796-4717347?ie=UTF8&s=books&qid=1178544764&sr=8-1