

Vektorprodukte, Abstandsaufgaben, Lagebeziehungen, Winkelberechnung – Wann welche Formel?

Von Florian Modler

Dieser Artikel soll helfen, auseinander zu halten, wann man welche Formel in der analytische Geometrie benutzen muss. Besonders bei Abstandsaufgaben kann man schnell durcheinander kommen, da man hier immer überlegen muss, ob man sich im \mathbb{R}_2 oder im \mathbb{R}_3 befindet.

Weiterhin soll dieser Artikel alle wichtigen Formeln zusammenfassen. Außerdem bietet dieser Artikel die Herleitung und Beweise aller Formeln. Diejenigen, die nur an den Formeln interessiert sind, können dies überspringen.

Inhalt

1 Die Vektorprodukte

- 1.1 Das Skalarprodukt
- 1.2 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt)
- 1.3 Das Spatprodukt

2 Winkelberechnungen

- 2.1 Winkel zwischen zwei Geraden
- 2.2 Winkel zwischen zwei Ebenen
- 2.3 Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

3 Verschiedene Formen von Ebenen oder Geraden

- 3.1 Die Normalenform
- 3.2 Die Hesseform
- 3.3 Die Plückerform

4 Lageuntersuchungen

- 4.1 Lageuntersuchung zwischen zwei Geraden
- 4.2 Lageuntersuchung zwischen zwei Ebenen
- 4.3 Lageuntersuchung zwischen einer Geraden und einer Ebene

5 Abstandsaufgaben

- 5.1 Projektionsverfahren
 - 5.1.1. Abstand Punkte – Gerade im \mathbb{R}^2 bzw. Punkt – Ebene im \mathbb{R}^3
 - 5.1.2. Abstand paralleler Geraden im \mathbb{R}^2 und paralleler Ebenen im \mathbb{R}^3
 - 5.1.3 Abstand einer Geraden von einer dazu parallel Ebene
- 5.2 Lotfußpunktverfahren
 - 5.2.1. Abstand Punkt – Gerade im \mathbb{R}^3
 - 5.2.2. Abstand paralleler Geraden im \mathbb{R}^3
 - 5.2.3. Abstand windschiefer Geraden im \mathbb{R}^3
- 5.3 Alternativ-Verfahren zum Lotfußpunktverfahren
 - 5.3.1. Abstand Punkt – Gerade im \mathbb{R}^3
 - 5.3.2. Abstand paralleler Geraden oder paralleler Ebenen im \mathbb{R}^3
 - 5.3.3. Abstand windschiefer Geraden im \mathbb{R}^3

1 Die Vektorprodukte

1.1 Das Skalarprodukt

Definition (Skalarprodukt):

Unter dem Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man das Produkt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Dabei bezeichnet der Winkel die Größe des (nicht überstumpfen) Winkels, den zwei an einem Punkt angetragene Repräsentanten von \vec{a} und \vec{b} einschließen.

Fallunterscheidungen:

Wir wollen nun einige Fallunterscheidungen für ganz bestimmte Winkel treffen:

Fall 1: $\alpha = 0$

Da $\cos 0^\circ = 1$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \bullet 1 = |\vec{a}| |\vec{b}|$

Ist zudem $\vec{a} = \vec{b}$, folgt:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$$

Fall 2: $\alpha = 180^\circ$

Da $\cos 180^\circ = -1$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \bullet (-1) = -|\vec{a}| |\vec{b}| (< 0)$

Fall 3: $\alpha = 90^\circ$

Da $\cos 90^\circ = 0$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \bullet 0 = 0$

Den folgenden Sachverhalt macht man sich immer wieder zu nutze:

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind zueinander orthogonal (senkrecht) genau dann, wenn $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ gilt.

Die eine Richtung dieses Satzes (Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$), haben wir eben bewiesen.

Die andere Richtung lässt sich wie folgt beweisen:

Aus $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = 0$ folgt, wenn $|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0$, dass $\cos \alpha = 0$ sein muss.

Dies ist nur für $\alpha = 90^\circ$ der Fall, da wir von nicht überstumpfen Winkel ausgehen!

Und bei $\alpha = 90^\circ$ stehen die Vektoren senkrecht!

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen!

Wir haben am Anfang die Definition des Skalarprodukts angegeben. Wie man darauf kommt, soll jetzt behandelt und untersucht werden.

Dazu betrachte man für $0 < \alpha < 90^\circ$ folgende Zeichnung:

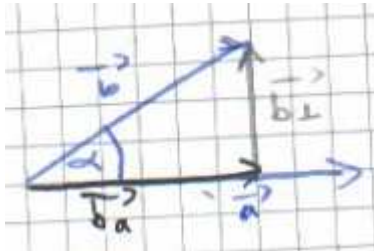


Abb. 1 Projektion eines Vektors (1. Fall)

Der Vektor \vec{b} wurde auf den Vektor \vec{a} zu einem Vektor \vec{b}_a projiziert.

Damit gilt:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\vec{b}_a + \vec{b}_\perp)$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b}_a + \vec{a} \bullet \vec{b}_\perp$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}_a| + 0$$

Des Weiteren betrachten wir den Fall für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$:

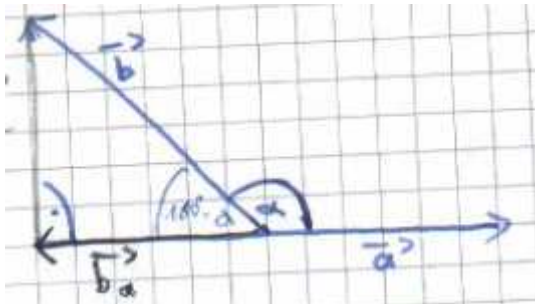


Abb. 2 Projektion eines Vektors (2. Fall)

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\vec{b}_a + \vec{b}_\perp)$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b}_a + \vec{a} \bullet \vec{b}_\perp$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}_a| + 0$$

Nun kann man bei beiden Fällen, bei dem 1. Fall und 2. Fall den Kosinus anwenden:

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

1. Fall:

$$\text{Außerdem gilt: } \cos \alpha = \frac{|\vec{b}_a|}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow |\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cos \alpha$$

Einsetzen liefert dann:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

2. Fall:

Da außerdem gilt:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{b}_a|}{|\vec{b}|}$$

$$-\cos \alpha = \frac{|\vec{b}_a|}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow |\vec{b}_a| = -|\vec{b}| \cos \alpha$$

Einsetzen liefert dann:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

Definition (Projektion):

Der Vektor \vec{b}_a wird als Projektionsvektor bezeichnet und ist der Vektor, dessen Vertreter man durch senkrechte Projektion eines Vektors von \vec{b} in die Richtung eines Vertreters \vec{a} erhält.

Berechnung des Skalarprodukts:

Man erinnert sich daran, dass der Kosinussatz eines Winkels im Kosinussatz der Trigonometrie vorkommt. Daher liegt es nahe, diesen Satz auf das Dreieck anzuwenden, welches von zwei Vertretern zweier Vektoren gebildet wird, die an einem Punkt angetragen sind. Die dritte Seite kann durch $\vec{a} - \vec{b}$ erfasst werden:

Wir drücken nun die Länge der dritten Seiten, also $|\vec{a} - \vec{b}|$ aus

- 1) mit Hilfe des Kosinussatzes
- 2) mit Hilfe der Koordinatendarstellung

$$1) |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$2) \text{ Es ist } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}. \text{ Weiterhin gilt:}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) \\ &+ (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{aligned}$$

Vergleich der beiden Darstellungen von $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ ergibt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 - 8 + 6 = -14$$

Gesetze des Skalarprodukts

Da das Ergebnis beim Skalarprodukt kein Vektor, sondern eine Zahl ist, scheiden das Assoziativgesetz, das Neutralitätsgesetz und das Inversitätsgesetz für die Gesetze des Skalarprodukts aus.

Das Assoziativgesetz kann schon daher nicht gelten, denn das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren eine Zahl zu. Somit ist schon $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ sinnlos.

Die Gleichungen $\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{a}$ (Neutralitätsgesetz) und $\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{n}$ (Inversitätsgesetz) sind sinnlos, weil links ein Skalar und rechts ein Vektor steht.

Satz: (Kommutativgesetz)

Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$.

Beweis:

1. *Möglichkeit* :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \alpha$$

Dieser Beweis erfolgt mit Hilfe des Kommutativgesetzes der reellen Zahlen.

2. *Möglichkeit* :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \bullet \vec{a} \quad q.e.d$$

Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $(r\vec{a}) \bullet (s\vec{b}) = rs(\vec{b} \bullet \vec{a})$.

Beweis:

$$\begin{aligned} (r\vec{a}) \bullet (s\vec{b}) &= \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} sb_1 \\ sb_2 \\ sb_3 \end{pmatrix} = (ra_1)(sb_1) + (ra_2)(sb_2) + (ra_3)(sb_3) \\ &= rs(a_1 b_1) + rs(a_2 b_2) + rs(a_3 b_3) = rs(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = rs(\vec{b} \bullet \vec{a}) \quad q.e.d \end{aligned}$$

Satz:

Für alle $r \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $(r\vec{a}) \bullet \vec{b} = r(\vec{a} \bullet \vec{b})$.

Dies ist ein Sonderfall für $s=1$ und wird gemischtes Assoziativgesetz genannt.

Satz: (Distributivgesetz)

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \quad q.e.d \end{aligned}$$

1.2 Das Vektorprodukt

Vielleicht habt ihr schon oft einen Vektor gesucht, der auf zwei Vektoren senkrecht steht. Zum Beispiel als ihr aus einer Parametergleichung einer Ebene eine Normalenform bestimmen wolltet oder als ihr die Schnittgerade zweier Ebenen, in Normalenform gegeben, berechnen wolltet. Hierzu mussten folgende Bedingungen erfüllt werden: $\vec{a} \bullet \vec{n} = 0 \wedge \vec{b} \bullet \vec{n} = 0$. Nun wollen wir dies allgemein lösen:

$$I. a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0 \mid \bullet (-b_3)$$

$$II. b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0 \mid \bullet a_3$$

$$I. -b_3 a_1 n_1 - b_3 a_2 n_2 - b_3 a_3 n_3 = 0$$

$$II. b_1 n_1 a_3 + b_2 n_2 a_3 + b_3 n_3 a_3 = 0$$

$$(-a_1 b_3 + a_3 b_1) \bullet n_1 + (-a_2 b_3 + a_3 b_2) \bullet n_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_3 b_1 - a_1 b_3) \bullet n_1 + (a_3 b_2 - a_2 b_3) \bullet n_2 = 0$$

Diese Gleichung können wir sehr einfach dadurch erfüllen, indem wir

$$n_1 = k(a_2 b_3 - a_3 b_2) \wedge n_2 = k(a_3 b_1 - a_1 b_3) \text{ setzen, denn}$$

$$k(a_3 b_1 - a_1 b_3)(a_2 b_3 - a_3 b_2) = (a_2 b_3 - a_3 b_2)k(a_3 b_1 - a_1 b_3).$$

Um nun den zugehörigen Wert von n_3 zu ermitteln, setzen wir die Ausdrücke von $n_1 \wedge n_2$ in die erste Gleichung des LGS ein. Damit erhalten wir:

$$a_1 k(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_2 k(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 n_3 = 0$$

$$a_3 n_3 = -k(a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3) = -k a_3 (-a_1 b_2 + a_2 b_1) = k a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

$$\rightarrow n_3 = k(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Durch Einsetzen in die beiden Gleichungen des Systems kann man bestätigen, dass

$$n_1, n_2 \wedge n_3 \text{ in jedem Fall das LGS erfüllen, auch wenn } a_3 = 0.$$

Wir erhalten also:

$$\vec{n} = k \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \text{ Die Zahl } k \text{ ist nur für den Begriff des Rechtssystems und des}$$

Linkssystems relevant. Für $k > 0$ bilden die Vektoren ein Rechtssystem, für $k < 0$ ein

Linkssystem. Es gilt also:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Definition (Kreuzprodukt):

Unter dem Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ versteht man den Vektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen uns nun klarmachen, welche geometrische Bedeutung der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ hat.

Wir können bereits die Richtung und die Orientierung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$: Er steht auf den beiden Vektoren senkrecht und diese drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Wir wissen aber noch nichts über die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_2 b_3)^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + (a_3 b_2)^2 \\ &+ (a_3 b_1)^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 + (a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2)^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2. \end{aligned}$$

Wir addieren und subtrahieren nun gleichzeitig die fehlenden Quadrate $(a_1 b_1)^2, (a_2 b_2)^2$ und $(a_3 b_3)^2$. Das Ziel dieser Umformung werden wir später sehen!

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_1 b_1)^2 + (a_1 b_2)^2 + (a_1 b_3)^2 + (a_2 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + (a_2 b_3)^2 + (a_3 b_1)^2 + (a_3 b_2)^2 \\ &+ (a_3 b_3)^2 - [(a_1 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + (a_3 b_3)^2 + 2a_2 b_3 a_3 b_2 + 2a_3 b_1 a_1 b_3 + 2a_1 b_2 a_2 b_1]. \end{aligned}$$

Den nächsten Schritt kann man besser verstehen, wenn man die Umformung rückwärts macht:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \bullet |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \bullet |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \alpha \quad (\text{Definition des Skalarprodukts})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \bullet |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \quad (\text{Ausklammern})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \bullet |\vec{b}|^2 \sin^2 \alpha \quad (\text{Formelsammlung liefert: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

"trigonometrischer Pythagoras".

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \sin \alpha)^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \sin \alpha.$$

Satz:

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ ist $\vec{a} \times \vec{b}$ derjenige Vektor, für den gilt:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \sin \alpha$

2) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Abb. 3 Das Vektorprodukt zweier Vektoren

Falls die beiden Vektoren kollinear sind, gilt $\alpha = 0^\circ$ oder $\alpha = 180^\circ$.

In beiden Fällen gilt $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$; daher ist dann $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ und somit auch $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Ist das Vektorprodukt 0, so sind die beiden Vektoren linear abhängig, also kollinear!

Nun wollen wir, wie wir das auch beim Skalarprodukt gemacht haben, Fallunterscheidungen vornehmen:

1) $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$

Da $\sin \alpha = \frac{h}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow h = |\vec{b}| \sin \alpha$, gilt:

$$A(P) = |\vec{a}| h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha.$$

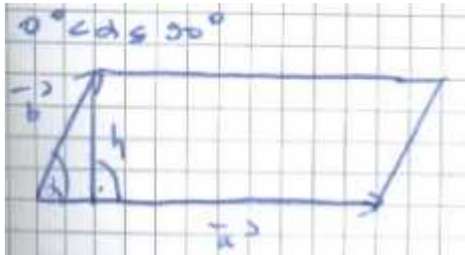


Abb. 4 Erst Fallunterscheidung

1) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Da $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h}{|\vec{b}|} = \sin \alpha = \frac{h}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow h = |\vec{b}| \sin \alpha$, gilt:

$$A(P) = |\vec{a}| h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha.$$

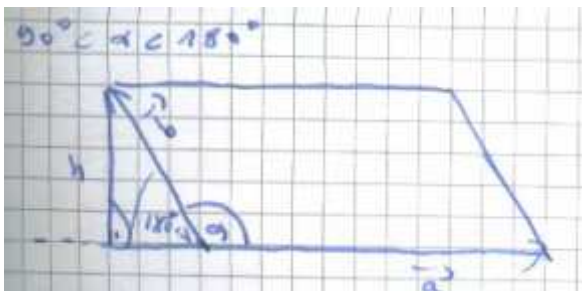


Abb. 5 Zweite Fallunterscheidung

Die Gesetze des Vektorprodukts

- Kommutativgesetz:

Vertauscht man in $\vec{a} \times \vec{b}$ die beiden Vektoren, so bilden $\vec{b} \times \vec{a}, \vec{a} \wedge \vec{b}$ ein Linkssystem, anstatt eines Rechtssystems. Daher gilt das Kommutativgesetz des Vektorprodukts nicht!

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 3-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 1-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Alternativgesetz:

Satz:

Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ gilt: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.

Beweis:

$$-(\vec{a} \times \vec{b}) = - \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 b_3 + a_3 b_2 \\ -a_3 b_1 + a_1 b_3 \\ -a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix} = \vec{b} \times \vec{a}.$$

q.e.d.

- Neutralitätsgesetz und Inversitätsgesetz:

Da $\vec{a} \times \vec{b}$ auf den beiden Vektoren senkrecht steht und weil - außer dem Nullvektor - kein Vektor auf sich selbst senkrecht steht, kann es kein neutrales Element geben.

Folglich gelten das Neutralitätsgesetz und das Inversitätsgesetz für das Vektorprodukt nicht.

- Assoziativgesetz:

Wenn das Assoziativgesetz gelten würde, müsste die Gleichung $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ erfüllt sein. Das dies nicht der Fall ist, können wir an einem Beispiel belegen:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- Gemischtes Assoziativgesetz:

Satz:

Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ gilt: $(r\vec{a}) \times (s\vec{b}) = rs(\vec{a} \times \vec{b})$.

Beweis:

$$\begin{aligned} (r\vec{a}) \times (s\vec{b}) &= \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} sb_1 \\ sb_2 \\ sb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ra_2)(sb_3) - (ra_3)(sb_2) \\ (ra_3)(sb_1) - (ra_1)(sb_3) \\ (ra_1)(sb_2) - (ra_2)(sb_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs(a_2b_3 - a_3b_2) \\ rs(a_3b_1 - a_1b_3) \\ rs(a_1b_2 - a_2b_1) \end{pmatrix} \\ &= rs \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = rs(\vec{a} \times \vec{b}). \quad q.e.d. \end{aligned}$$

- Das Distributivgesetz:

Satz:

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gilt: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad q.e.d. \end{aligned}$$

1.3 Das Spatprodukt

Betrachten wir folgende Abbildung:

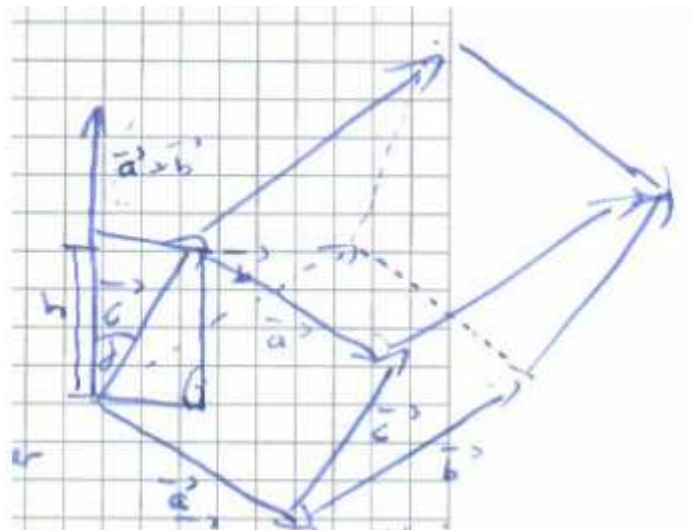


Abb. 6 Darstellung des Spatprodukts

Es gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \gamma$.

Das Vektorprodukt $(\vec{a} \times \vec{b})$ ist die Maßzahl des Flächeninhaltes des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Eine Länge mit der Maßzahl $h = |\vec{c}| \cos \gamma$ erhält man, wenn man den Vektor \vec{c} in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ hineinprojiziert.

Diese Länge ist die Höhe des von den drei Vektoren aufgespannten Körpers, der von sechs paarweise zueinander parallelen ebenen Flächen in Form von Parallelogrammen begrenzt wird. Man nennt einen solchen Körper Parallelepiped oder Spat (siehe Abbildung 6).

Die in der Abbildung 6 dargestellten drei Vektoren bilden ein Rechtssystem. Darunter verstehen wir in solchen Fällen Folgendes: Wählt man drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mit gemeinsamen Anfangspunkt, so weist der Vertreter von \vec{c} in denselben Halbraum der von \vec{a}, \vec{b} aufgespannten Ebene wie der Vertreter von $\vec{a} \times \vec{b}$, der am gleichen Punkt angetragen ist.

Für die Inhaltsmaßzahl des Parallelepipeds (Spat) gilt in diesem Fall:

$$V = Ah = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \gamma = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$$

mit $h = |\vec{c}| \cos \gamma$.

Satz:

Bilden drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ ein Rechtssystem, so gilt für die Inhaltsmaßzahl des von den drei Vektoren aufgespannten Spats:

$$V_{\text{Spat}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}.$$

Vertauscht man im Produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ die Vektoren, so erhält man wegen

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}): (\vec{b} \times \vec{a}) \bullet \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}.$$

Bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem, so bilden $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ ein Linkssystem; das zugehörige Spatprodukt ist dann negativ, da $\vec{a} \times \vec{b}$ negativ wird.

Sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, also komplanar, so "klappt" das Spat "zusammen", es gilt also: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = 0$.

Das heißt ist das Vektorprodukt 0, so sind die beiden Vektoren linear abhängig.

Ist das Spatprodukt 0, so sind die Vektoren komplanar.

Satz:

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} > 0$, so bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem,

gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = 0$, so sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar,

gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} < 0$, so bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Linkssystem.

Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem bilden, bilden auch $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \wedge \vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ ein Rechtssystem;

dagegen bilden dann $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}; \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ jeweils ein Linkssystem.

Satz:

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \bullet \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \bullet \vec{b}$.

Ist das Spatprodukt 0, so sind die Vektoren linear abhängig und damit komplanar!

Die im Spatprodukt auftretenden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind also "zyklisch vertauschbar".

Wendet man bei $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \bullet \vec{a}$ rechts das Kommutativgesetz an, so ergibt sich:
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$.

Es kommt beim Spatprodukt also nicht darauf an, welche der drei Vektoren man durch das Vektorprodukt verknüpft; man kann die beiden Verknüpfungszeichen also vertauschen, wenn man den Zyklus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bei behält.

Daher hat man für das Spatprodukt eine abkürzende Schreibweise eingeführt.

Definition:

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gilt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =_{df} (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$.

Koordinatendarstellung des Spatprodukts:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3.$$

Wir behandeln zunächst ein Beispiel, danach führen wir eine andere Schreibweise ein. Nämlich die der Determinante und die Regel von Sarrus.

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimme also: $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ 3+4 \\ 2+1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2+14+9 = 25$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2; 1; -2 \\ -1; 1; 2 \\ 3; -2; 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2; 1 \\ -1; 1 \\ 3; -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \bullet 1 \bullet 3 + 1 \bullet 2 \bullet 3 + (-2) \bullet (-1) \bullet (-2) - 3 \bullet 1 \bullet (-2) - (-2) \bullet 2 \bullet 2 - 3 \bullet (-1) \bullet 1 = 6 + 6 - 4 + 6 + 8 + 3 = 25.$$

Allgemein gilt:

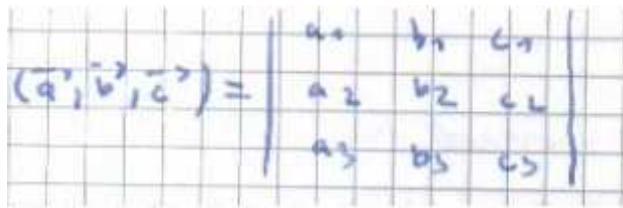

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Abb. 7 Dreireihige Determinante

Um dies genauer zu erklären, schreiben wir die beiden ersten Spalten der Determinante noch einmal neben die Determinante.

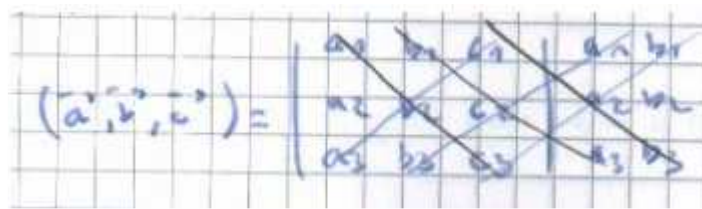

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Abb. 8 Lösung mit Hilfe einer dreireihigen Determinante

Die positiv zu nehmenden „Hauptdiagonalenprodukte“ (von links oben nach rechts unten) sind dann: $a_1b_2c_3, a_3b_1c_2 \wedge a_2b_3c_1$.

Die negativ zu nehmenden „Nebendiagonalenprodukte“ (von rechts oben nach links unten) sind dann: $a_3b_2c_1, a_1b_3c_2 \wedge a_2b_1c_3$.

Es gilt also:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3..$$

2 Winkelberechnungen

Um Winkelaufgaben vollständig berechnen zu können, müssen wir drei Fälle unterscheiden:

- Winkel zwischen zwei Geraden
- Winkel zwischen zwei Ebenen
- Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Wir vereinbaren vorher, dass wir unter dem Winkel zwischen zwei Geraden, zweier Ebenen und einer Geraden mit einer Ebene den kleinsten eingeschlossenen Winkel verstehen.

2.1 Winkel zwischen zwei Geraden

a)

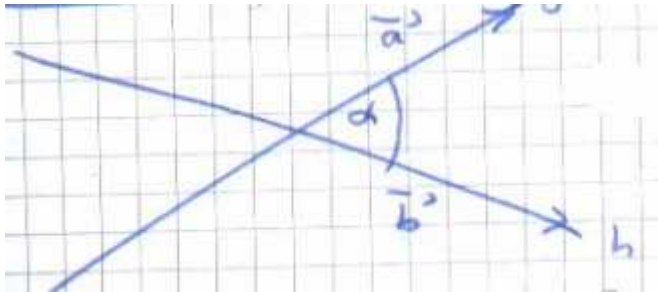


Abb. 9 Winkel zwischen zwei Geraden (Fall a))

Mit Hilfe der Definition des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ können wir durch äquivalente Umformungen den Winkel berechnen:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Dies setzt aber voraus, dass für den Winkel folgendes gilt: $0 < \alpha < 90^\circ$.

Somit ist $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.

Es kann aber auch folgender Fall auftreten:

b)

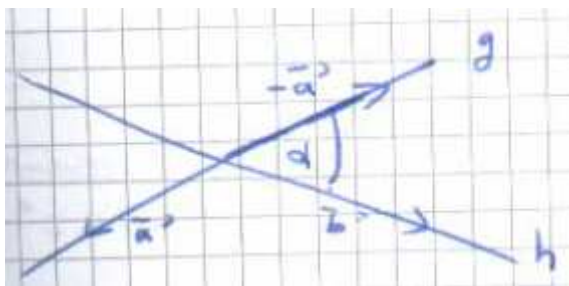


Abb. 10 Winkel zwischen zwei Geraden (Fall b))

Nun ist der Vektor \vec{a} entgegengesetzt orientiert. Folglich müssen wir den Gegenvektor verwenden. Somit gilt:

$$\cos \alpha = \frac{-\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Wenn $\vec{a} \bullet \vec{b} < 0$, dann schließen die Vektoren einen stumpfen Winkel ein. Wenn man aber den Gegenvektor verwendet gilt wieder $\cos \alpha > 0$.

Eine andere Schreibweise für das Minuszeichen in $\cos \alpha = \frac{-\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ ergibt sich,

wenn wir Betragsstriche setzen:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right|.$$

Für den Fall a) ändert sich in diesem Fall nichts, denn $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right|$.

Man fasst die beiden Fälle zu $\cos \alpha = \left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right|$ zusammen.

c) Es gibt noch einen dritten Fall und zwar, wenn die beiden Geraden und damit die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Dies ist bei 90° der Fall.

Somit ist $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$. Aber auch diese Formel passt zu dem Fall c), denn $|0|=0$!

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz:

Sind die beiden Geraden, zwischen denen der Schnittwinkel berechnet werden soll, in Parameterform gegeben, so kann man den Winkel mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right|$$

Beispiel:

Wir behandeln ein Beispiel:

Gegeben sei g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da die gegebenen Ortsvektoren übereinstimmen, schneiden sich die beiden Geraden in dem Punkt $P(2; 2; -3)$.

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 - 2 = -2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}; |\vec{b}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{-2}{3\sqrt{6}} \right|$$

Sind zwei Geraden g_1 und g_2 (im \mathbb{R}^2) durch Normalengleichungen gegeben, so bestimmt man die Größe des Winkels zwischen den beiden Normalenvektoren; denn dieser Winkel ist maßgeblich mit einem der beiden nicht überstumpfen Winkel zwischen g_1 und g_2 . Das Ganze wird sozusagen um 90° gedreht (siehe Abbildung 11).

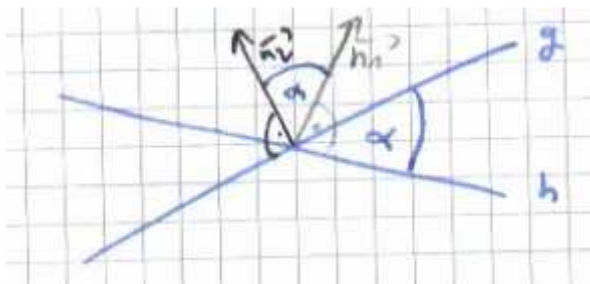


Abb. 11 Schnitt zweier Geraden in Normalenform

Es gilt somit: $\cos \alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right|$.

2.2 Winkel zwischen zwei Ebenen

Sind die beiden Ebenen durch Normalengleichung gegeben, so erhält man die Größe des kleinsten eingeschlossenen Winkels zwischen den beiden Ebenen ebenfalls durch die oben angeführte Formel. Denn wir können wieder folgende Abbildung verwenden, die mit Abbildung 11 in dieser Hinsicht übereinstimmt, dass die Geraden keine Geraden, sondern Ebenen darstellen sollen, die in den Raum hinein weisen.

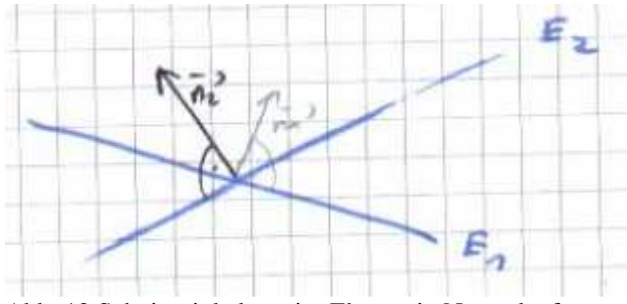


Abb. 12 Schnittwinkel zweier Ebenen in Normalenform

Es gilt also auch folgende Formel, um den Schnittwinkel der beiden Ebenen zu berechnen:

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right|.$$

Satz:

Um den Schnittwinkel zweier Geraden und zweier Ebenen in Normalenform zu berechnen, wendet man folgende Formel an:

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right|.$$

2.3 Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Betrachten wir folgende Abbildung:

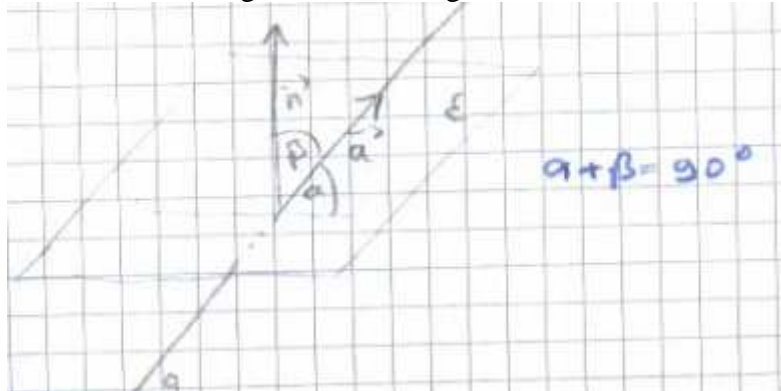


Abb. 13 Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Der zu berechnende Winkel ist mit α bezeichnet.

Der Winkel β kann einfach berechnet werden. Dazu betrachten wir den

Normalenvektor und den Vektor \vec{a} der Geraden. Somit können wir folgende Formel anwenden:

$$\cos \beta = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| |\vec{n}|} \right|.$$

Weiterhin können wir an der Abbildung 5 feststellen, dass $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Somit gilt:

$$\sin \alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| |\vec{n}|} \right|, \text{ da } \cos \beta = \sin \alpha, \text{ wenn } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Wir wollen den Zusammenhang $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \sin \alpha$, wenn $\alpha + \beta = 90^\circ$ nun erklären: Dazu schauen wir uns Abbildung 6 an:

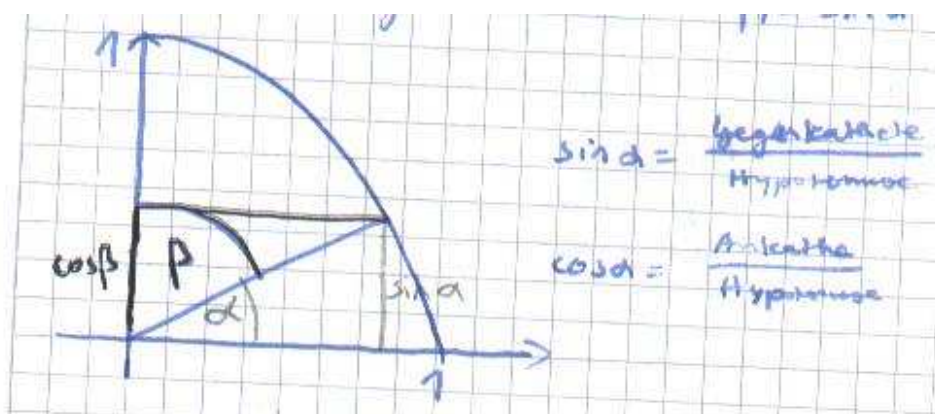


Abb. 14 Herleitung des oben aufgeführten Zusammenhangs

Wir sehen, dass damit gilt: $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \sin \alpha$, wenn $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Satz:

Der Schnittwinkel einer Geraden und einer Ebene lässt sich mit $\sin \alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| |\vec{n}|} \right|$ berechnen.

3 Verschiedene Formen von Gleichungen von Geraden oder Ebenen

3.1 Die Normalenform

Gegeben sei eine Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst einen Vektor \vec{n} , der auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung der Geraden g mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 + t \cdot 0$$

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

$$-3x + 2y = 8.$$

Herleitung:

Mit Hilfe des Skalarprodukt können wir die Umformung in parameterfreie Gleichungen in wesentlich einfacher Weise durchführen. Wir multiplizieren die Gleichungen skalar mit einem Vektor, der auf der Geraden bzw. auf der Ebene senkrecht steht.

Man nennt diesen Vektor einen Normalvektor.

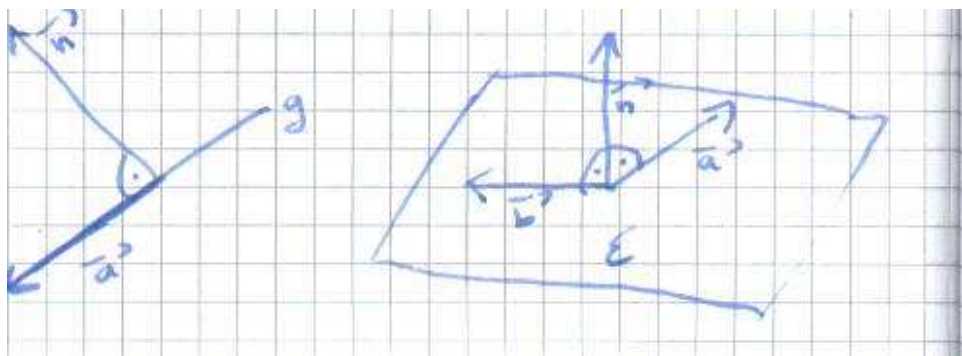


Abb. 15 Normalvektor einer Geraden und Ebenen

$$1) \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \rightarrow \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n} + t\vec{a} \bullet \vec{n} = \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n}, \text{ denn } t\vec{a} \bullet \vec{n} = 0$$

$$2) \vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b} \rightarrow \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n} + r\vec{a} \bullet \vec{n} + s\vec{b} \bullet \vec{n} = \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n},$$

$$\text{denn } t\vec{a} \bullet \vec{n} = 0 \wedge s\vec{b} \bullet \vec{n} = 0.$$

Warum funktioniert das Verfahren?

Das Verfahren funktioniert deshalb, da wir von der Richtung her einen Normalenvektor, von der Orientierung einen zweiten Normalenvektor und von der Länge unendlich viele Normalenvektoren angeben können.

Man nennt die Gleichung $\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n}$ auch Normalengleichung einer Geraden bzw. einer Ebene. Dies gilt nur für eine Gerade im \mathbb{R}^2 und für eine Ebene im \mathbb{R}^3 , da wir sonst unendlich viele Normalenvektoren angeben können.

$$\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$$

Zu 1)

Der Raum R_2 wird von den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt.

Jeder Vektor der Ebene lässt sich also aus diesen beiden Vektoren erzeugen:

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{a} + r\vec{n}$$

Wir müssen zeigen, dass $r = 0$ ist.

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (t\vec{a} + r\vec{n}) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t(\vec{a} \bullet \vec{n}) + r(\vec{n} \bullet \vec{n}) = 0.$$

Wegen $\vec{a} \bullet \vec{n} = 0$ und $\vec{n} \bullet \vec{n} \neq 0$ folgt $r = 0$. Also gilt:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{a}.$$

Zu 2)

Analog gilt:

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{n}$$

Wir müssen zeigen, dass $t = 0$ ist.

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{n}) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow r(\vec{a} \bullet \vec{n}) + s(\vec{b} \bullet \vec{n}) + t(\vec{n} \bullet \vec{n}) = 0.$$

Wegen $\vec{a} \bullet \vec{n} = \vec{b} \bullet \vec{n} = 0$ und $\vec{n} \bullet \vec{n} \neq 0$ folgt $t = 0$. Also gilt:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 = r\vec{a} + s\vec{b}.$$

Damit haben wir in beiden Fällen aus der Gleichung $\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n}$ die Paramtergleichung wieder hergeleitet. Wir haben also insgesamt gezeigt, dass durch jede Gleichung der Form $\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n}$ bzw. $(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$ eine Gerade bzw. eine Ebene dargestellt wird.

Unterschied liegt nur darin, dass der Vektor $\vec{x} - \vec{x}_0$ bei einer Geraden zwei und bei einer Ebene drei Koordinaten besitzt.

Normalenform:

Ist eine Gerade im R^2 und eine Ebene im R^3 durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor \vec{x}_0 und durch den Normalenvektor \vec{n} festgelegt, so gilt:

$$\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n} \text{ bzw. } (\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0.$$

Beispiele:

1) Für eine Gerade

Gegeben sei eine Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst einen Vektor \vec{n} , der auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung der Geraden g mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 + t \bullet 0$$

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

$$-3x + 2y = 8.$$

2) Für eine Ebene

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmung eines Normalenvektors mit $\vec{a}, \vec{b} \perp \vec{n}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0. \text{ Mit Hilfe des Kreuzprodukts kann nun ein Vektor}$$

gefunden werden, der auf beiden Spannvektoren senkrecht steht!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-9 \\ -6-0 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3-3=0 \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6-6=0.$$

2. Multiplizieren der Gleichung der Ebene mit dem Normalenvektor:

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3+2+1$$

$$3x+2y+z=6$$

Wir behandeln ein weiteres Beispiel:

Wollten wir eine Ebene in Parameterform in Normalenform umformen, so mussten wir einen Normalenvektor finden, der auf beiden Spannvektoren senkrecht steht.

Dies können wir nun mit Hilfe des Vektorprodukts durchführen:

Wir behandeln ein Beispiel:

Gegeben seien der Vektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, und die beiden Spannvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir berechnen zunächst das Vektorprodukt der beiden

Spannvektoren und erhalten damit einen Vektor, der auf beiden Spannvektoren senkrecht steht!

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir wenden nun die Formel $(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$ an:

$$(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -8.$$

Man kann die Normalengleichung einer Ebene in drei verschiedene Formen schreiben; jede lässt sich geometrisch deuten:

1) Normalengleichung allgemein:

Die Normalengleichung lautet allgemein: $\vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{x}_0 \bullet \vec{n}$ bzw. $(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$

Da das Skalarprodukt 0 ist, sind die beiden Vektoren senkrecht: $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{n}$.

(siehe Abbildung 1)

2) Mit $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$:

$$\vec{x} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{x}_0 \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$$

Determinantenschreibweise: $(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{x}_0, \vec{b}, \vec{c})$. Dies bedeutet, dass die von $\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}$ bzw. $\vec{x}_0, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats inhaltsgleich sind. (siehe Abbildung 2).

3) Umschreiben von 2):

Aus $\vec{x} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{x}_0 \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$ folgt: $(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, also $(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

Dies bedeutet, dass die Vektoren linear abhängig, also komplanar sind,

da Spatprodukt 0 ist. (siehe Abbildung 16).

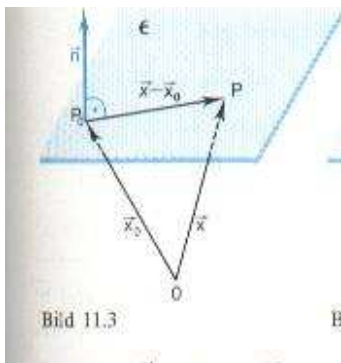


Abb. 16

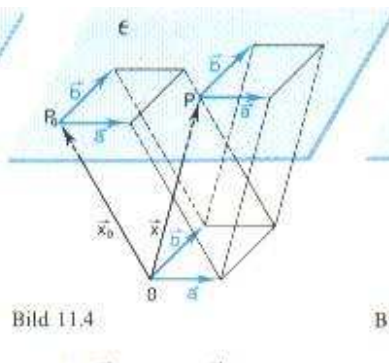


Abb. 17

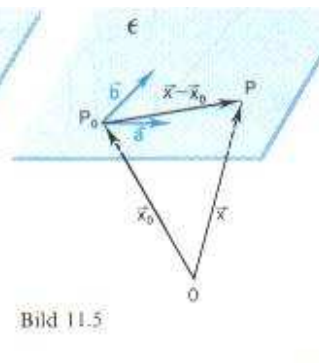


Abb. 18

Mit Hilfe von 2) können wir nun eine andere Methode anwenden, mit der wir eine Parameterform einer Ebene in Normalenform umschreiben können:

$$\vec{x} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{x}_0 \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$$

Die Gleichung $(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{x}_0, \vec{b}, \vec{c})$ liefert zwei Determinanten. Wir

müssen also die Regel von Sarrus zweimal anwenden. Durch Ausrechnen der beiden

Determinanten ergibt sich: $2x + 3z + 2y - z + 2x + 6y = 2 - 6 - 4 + 2 + 2 - 12$

$\Leftrightarrow 2x + 4y + z = -8$. Auch so erhält man dann die Normalenform:

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -8. \text{ Dies sehe entsprechend so aus:}$$

Ausrechnen der ersten Determinante:

$$\begin{array}{ccc|cc} x & -3 & 1 & x & -3 \\ y & 1 & -1 & y & 1 \\ z & 2 & 2 & z & 2 \end{array}$$

$$2x + 3z + 2y - z + 2x + 6y = 2x + 4y + z$$

Ausrechnen der zweiten Determinante:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}$$

$$2 - 6 - 4 + 2 + 2 - 12 = -8$$

Abb. 19 Berechnung der Normalenform mit Hilfe von Determinanten

Beispiel:

Gegeben seien die Punkte $A(1; -3; 2); B(-2; 0; 1); C(1; 2; -2)$.

Die Ebene, die durch diese drei Punkte aufgespannt wird, soll in Normalenform umgeformt werden.

Zuerst wählen wir uns den Punkt A, genauer den Ortsvektor zum Punkt A als Stützvektor und erhalten die Ebene:

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + r \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Möglichkeit: mit Hilfe des Kreuzprodukts:

Diese Ebene soll nun in Normalenform umgeschrieben werden.

Wir suchen also einen Vektor, der auf beiden Spannvektoren senkrecht steht.

Wir könnten ein LGS aufstellen und dieses lösen, schneller geht es mit dem Kreuzprodukt.

Denn der Ergebnisvektor ist ein Vektor, der auf beiden zu multiplizierenden Vektoren senkrecht steht.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+5 \\ 0-12 \\ -15-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ Dieser Vektor ist unser Normalenvektor, der auf beiden}$$

Spannvektoren senkrecht steht. Wende nun die Formel $(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$ an:

$$(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}) \bullet \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} = -1.$$

2. Möglichkeit: mit Hilfe von Determinanten:

$$\vec{x} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{x}_0 \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$$

Die Gleichung $(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{x}_0, \vec{b}, \vec{c})$ liefert zwei Determinanten. Wir

müssen also die Regel von Sarrus zweimal anwenden. Durch Ausrechnen der beiden

Determinanten ergibt sich: $-12x - 15z - 5x - 12y = -12 - 30 + 5 + 36$

$\Leftrightarrow -7x - 12y - 15z = -1$. Auch so erhält man dann die Normalenform:

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} = -1. \text{ Beide Wege führen zum Ziel.}$$

3.2 Die Hesseform

Die allgemeine Form einer Gerade ist $ax+by=c$. Wir nehmen an, dass $c > 0$.

Wenn $c < 0$, dann multiplizieren wir die Gleichung einfach mit -1 .

Für c gilt:

$$c = \vec{x}_0 \cdot \vec{n} = |\vec{x}_0| |\vec{n}| \cos \alpha \quad (\text{Dies gilt nach der Definition des Skalarprodukts})$$

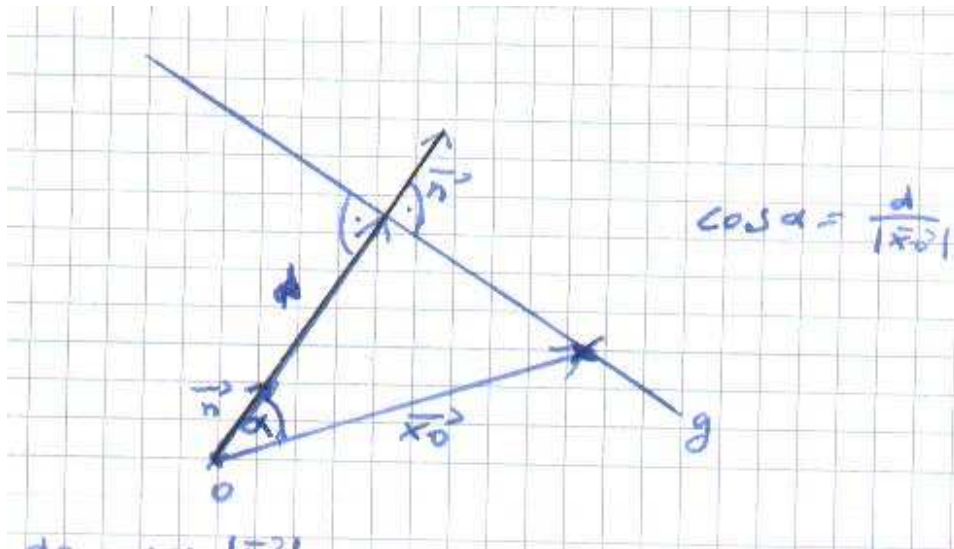


Abb. 20 Die Hessesche Normalenform

Aus dem Kosinus folgt nach Abbildung 20:

$$\cos \alpha = \frac{d}{|\vec{x}_0|} \Leftrightarrow d = \cos \alpha \cdot |\vec{x}_0|$$

Aus der Gleichung $c = \vec{x}_0 \cdot \vec{n} = |\vec{x}_0| |\vec{n}| \cos \alpha$ und aus $d = \cos \alpha \cdot |\vec{x}_0|$ folgt:

$$d = \frac{c}{|\vec{n}|}$$

Wir wählen für den Normalenvektor einen Einheitsvektor mit $|\vec{n}| = 1$.

Dann gilt nämlich: $d = c$.

Das absolute Glied der Gleichung $ax+by=c$ gibt in diesem Fall also den Abstand der Geraden zu dem Ursprung an.

Wenn $c = 0$ brauchen wir den Abstand nicht zu berechnen, bzw. er ist 0.

Wir bezeichnen den zu einem Vektor \vec{a} gehörenden Einheitsvektor mit \vec{e}_a .

$\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ ist der zu \vec{n} gehörende Normaleneinheitsvektor.

Dividiert man eine Normalengleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}$ durch $|\vec{n}|$, so erhält man $\vec{x} \cdot \vec{e}_n = \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n$, wobei $\vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n = d$.

Diese Form bezeichnet man nach dem Mathematiker Ludwig Otto Hesse als Hessesche Normalenform oder als Hesseform.

Hesseform:

Ist eine Gerade (im R^2) bzw. eine Ebene (im R^3) durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor \vec{x}_0 und durch einen Normaleneinheitsvektor \vec{e}_n festgelegt, so gilt für die Ortsvektoren

\vec{x} aller Punkt von der Geraden bzw. der Ebene:

$$\vec{x} \bullet \vec{e}_n = \vec{x}_0 \bullet \vec{e}_n.$$

Ist die Orientierung von \vec{e}_n so gewählt, dass $\vec{x}_0 \bullet \vec{e}_n \geq 0$, so gibt $\vec{x}_0 \bullet \vec{e}_n$ den Abstand d der Gerade bzw. der Ebene zum Ursprung an.

Beispiel:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen des Normalenvektors zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ da } \vec{a} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

2. Bestimmen des Normaleneinheitsvektors

$$\text{Da } |\vec{n}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ ist der Normaleneinheitsvektor } \vec{e}_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt aus $\vec{x} \bullet \vec{e}_n = \vec{x}_0 \bullet \vec{e}_n = d$:

$$\vec{x}_0 \bullet \vec{e}_n = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \bullet (-6 - 4) = \frac{1}{5} \bullet (-10) = -2 < 0$$

Dieser Normaleneinheitsvektor hat also die falsche Orientierung, wir wählen:

$$\vec{e}_n' = -\vec{e}_n = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\vec{x}_0 \bullet \vec{e}_n' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \bullet (6 + 4) = \frac{1}{5} \bullet 10 = 2 > 0.$$

Hesseform der Geraden lautet also: $g : -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 2$.

Der Abstand der Geraden vom Nullpunkt ist $d = 2$.

Gibt man eine Gerade in Hesseform an, so kann man am absoluten Glied sofort den Abstand der Ebene bzw. der Geraden vom Ursprung ablesen!

3.3 Die Plückerform

Wir wissen, dass wir eine Geradengleichung in Parameterform $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ nur dann durch skalare Multiplikation mit einem Normalenvektor \vec{n} in die Normalenform überführen können, wenn sich die Gerade im R^2 befindet.

Denn: Liegt die Gerade im R^3 , so kann man den Parameter auf diese Weise nicht eliminieren, weil es zu einer Raumgeraden kein eindeutig bestimmten Normalenvektor definiert ist (es gibt nur einen der in der Richtung übereinstimmt, einen weiteren in der Orientierung und unendlich viele in der Länge, alle sind Vielfache des anderen im R_2 , im R_3 ist das anders).

Durch das Vektorprodukt gelingt es uns nun aber, den Parameter t zu eliminieren, indem man die Gleichung vektoriell mit dem Richtungsvektor multipliziert. Wir erhalten:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \quad | \times \vec{a}$$

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x}_0 \times \vec{a} + t\vec{a} \times \vec{a}$$

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x}_0 \times \vec{a} + 0, \text{ da } \vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

Mit Hilfe des Distributivgesetz gilt: $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = 0$.

Die Gleichung besagt, dass die Vektoren $\vec{x} - \vec{x}_0 \wedge \vec{a}$ linear abhängig, also kollinear sind, denn wenn das Skalarprodukt 0 ist, sind die Vektoren linear abhängig und damit kollinear. (siehe Abbildung 21).

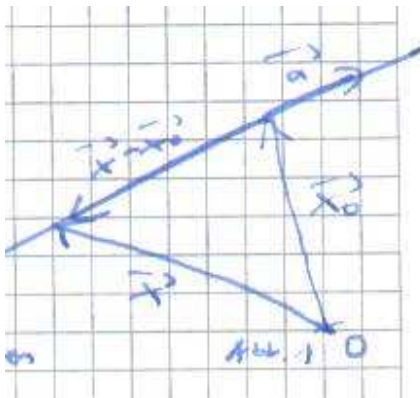


Abb. 21 Die beiden Vektoren sind kollinear.

Wir müssen nun zeigen, dass $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = 0$ äquivalent sind.

Da die Vektoren $\vec{x} - \vec{x}_0 \wedge \vec{a}$ linear abhängig, also kollinear sind, gibt es also zu jedem Vektor \vec{x} , der der Gleichung $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = 0$ genügt, eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$. Damit haben wir gezeigt, dass die beiden Gleichungen äquivalent sind.

Satz:

Ist eine Gerade g durch einen Ortsvektor x_0 und einen Richtungsvektor \vec{a} gegeben, so gilt: $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = 0$ (Plückerform).

Was bedeutet dies geometrisch?

Wir verwenden ein Beispiel, um die Plückerform uns geometrisch zu betrachten, da dies sonst zu umständlich wäre.

Gegeben sei eine Gerade mit dem Stützvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen wir zunächst mit $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x}_0 \times \vec{a}$ die Plückerform (genauer: die

drei Gleichungen der Plückerform).

$$\text{Es gilt: } \vec{x} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - z \\ z + 2x \\ x - y \end{pmatrix} \wedge \vec{x}_0 \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Plückerform besitzt also die drei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} -2y - z & = & -1 \\ 2x & + & z = 7 \\ x & - & y = 3 \end{array}$$

Jede Gleichung lässt sich in zweierlei Hinsicht deuten:

- Als Gleichung einer Geraden in einer der drei Koordinatenebene oder
- Als Gleichung einer Ebene.

Wenden wir dies auf unser Beispiel an und verwenden die dritte Gleichung:
 So ist zum Beispiel $x - y = 3$ die Gleichung einer Geraden in der $x - y - Ebene$.

$x - y - 0 \cdot z = 3$ ist aber auch eine Gleichung einer Ebene mit dem Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor liegt in der $x - y - Ebene$, die Ebene steht auf der $x - y - Ebene$

senkrecht und schneidet diese Koordinatenebene in der Geraden zur Gleichung $x - y = 3$.

Die Raumgerade g wird also in der Plückerform $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x}_0 \times \vec{a}$ dargestellt durch drei Ebenen, die jeweils auf einer Koordinatenebene senkrecht stehen und die sich in g schneiden (siehe Abbildung 22).

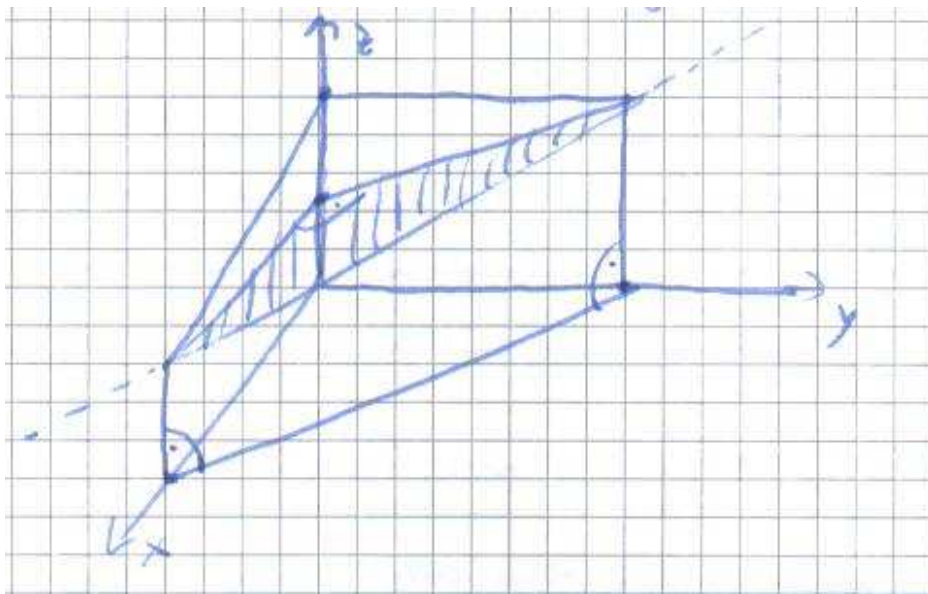


Abb. 22 Darstellung der Plückerform

Man nennt die drei Ebenen auch projizierende Ebenen und die durch Projektion erzeugten Bildgeraden

- In der $x - y - Ebene$ Grundriss: $x - y = 3$
- In der $x - z - Ebene$ Aufriss: $-2y - z = -1$
- In der $x - z - Ebene$ Seitenriss: $2x + z = 7$

Die Darstellung einer Raumgeraden in Plückerform entspricht also Grund -, Auf -und Seitenriss einer Geraden.

Während sich in der Regel drei Ebenen in einem Punkt schneiden, schneiden sich die drei projizierenden Ebenen in der betreffenden Geraden.

4 Lageuntersuchungen

4.1 Lageuntersuchung zwischen zwei Geraden

Fassen wir noch einmal zusammen, wie zwei Geraden zueinander liegen können. Sie können

- parallel sein
- identisch sein
- sich in einem Punkt schneiden
- oder windschief liegen.

Nun kann die Lageuntersuchung zweier Geraden auch mit dem Vektorprodukt vorgenommen werden. Wir leiten zuerst eine Formel für die Abstandsberechnung her.

Bei der Lagebeziehungen zweier Geraden $\vec{x} = \vec{x}_1 + r\vec{a}$ \wedge $\vec{x} = \vec{x}_2 + s\vec{b}$ kommt es darauf an, ob die beiden Richtungsvektoren linear abhängig, also kollinear sind oder nicht.

Wenn $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, sind die beiden Richtungsvektoren kollinear, wenn $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$, sind die beiden Vektoren nicht kollinear.

Gilt also für die Richtungsvektoren zweier Geraden $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$, so sind die Geraden entweder windschief oder schneiden sich genau in einem Punkt. Die beiden Geraden liegen dann aber stets in den beiden parallelen Ebenen $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\varepsilon_1 : \vec{x} = \vec{x}_1 + r\vec{a} + s\vec{b} \wedge \varepsilon_2 : \vec{x} = \vec{x}_2 + \vec{a} + s\vec{b}.$$

Sind die beiden Ebenen voneinander verschieden, so ist ihr Abstand der beiden windschiefen Geraden. Diesen Abstand berechnen wir mit dem Projektionsverfahren. Es gilt:

$$d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}|.$$

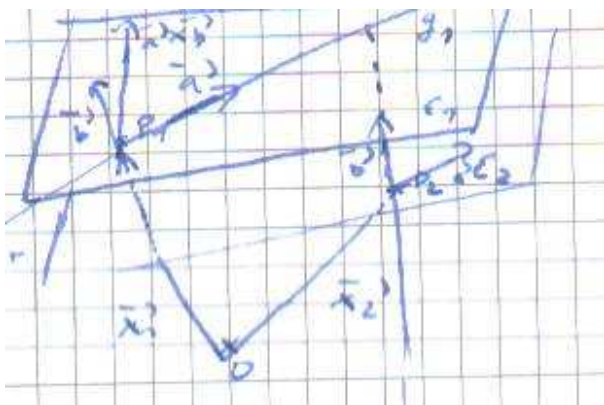


Abb. 23 Projektionsverfahren mit Hilfe des Vektorprodukts

Also fassen wir noch einmal zusammen:

Ist das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren der beiden Geraden 0, so sind die beiden Geraden entweder parallel oder identisch! Nun können wir die oben angeführte Abstandsberechnungsformel zu Hilfe ziehen. Ist der Abstand 0, so sind die Geraden identisch. Ist der Abstand ungleich 0, sind die beiden Geraden parallel

Ist das Vektorprodukt schon nicht 0, dann schneiden sich die Geraden entweder oder sie sind windschief. Auch hier wenden wir die Formel $d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}|$ an. Ist der Abstand 0, dann gibt es einen Schnittpunkt, der gegebenenfalls noch berechnet werden müsste. Ist der Abstand nicht 0, dann sind die beiden Geraden windschief.

Wir behandeln nicht für jeden Fall ein Beispiel, sondern begnügen uns mit einem Beispiel.

Beispiel:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}; |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{81 + 36 + 49} = \sqrt{166}.$$

$$d = \left| \frac{1}{\sqrt{166}} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \frac{166}{\sqrt{166}} = \sqrt{166} = 12,9.$$

Dieser Verfahren, die Lage zwischen zwei Geraden mit Hilfe des Vektorprodukts zu untersuchen, sollte angewendet werden, wenn bei einer Folgeaufbau der Abstand der beiden Geraden verlangt ist, da dieser hier mit schon berechnet wird.

4.2 Lageuntersuchung zwischen zwei Ebenen

Wir können zwei Ebenen zu einander liegen?

Sie können

- parallel liegen
- identisch sein
- oder sich in einer Schnittgeraden schneiden

Gehen wir davon aus, dass die beiden Ebenen in Normalform angegeben seien.

Nun muss man schauen, ob die Normalenvektoren ein Vielfaches des anderen ist. Ist dies der Fall liegen die Ebenen auf jeden Fall schon einmal parallel. Ist nun das absolute Glied noch identisch, dann sind die Ebenen identisch.

Wir behandeln Beispiele:

1) Die beiden Ebenen sind identisch

Gegeben seien die Ebenen in Normalform: $\varepsilon_1: -x + y + z = 4; \varepsilon_2: -2x + 2y + 2z = 8$

Die beiden Normalenvektoren sind: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der eine ist also ein

Vielfaches des anderen. Auch das absolute Glied muss nur mit 2 multipliziert werden.

Die Ebenen sind also identisch!

2) Die Ebenen liegen parallel zueinander

Gegeben seien die Ebenen in Normalform: $\varepsilon_1: -x + y + z = 3; \varepsilon_2: -2x + 2y + 2z = 8$

Die beiden Normalenvektoren sind: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der eine ist also ein

Vielfaches des anderen. Das absolute Glied ist kein Vielfaches des anderen.

Die beiden Ebenen sind also nur parallel!

3) Die Ebenen schneiden sich

Gegeben sei die Ebene $\varepsilon_1 : 2x - y + 3z = 4$ und die Ebene $\varepsilon_2 : x + 2y - z = 1$.

Da die beiden Normalenvektoren nicht kollinear sind, können die Ebene nicht zueinander parallel (damit auch nicht identisch) sein. Die Ebenen müssen sich also in einer Schnittgeraden schneiden.

Da $\vec{n}_1 \perp \varepsilon_1 \wedge \vec{n}_2 \perp \varepsilon_2$ müssen diese beiden Normalenvektoren auch auf der Schnittgeraden senkrecht stehen. Damit gilt:

$\vec{n}_1 \cdot \vec{a} = 0 \wedge \vec{n}_2 \cdot \vec{a} = 0$ Wir berechnen also folgendes Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Um einen Punkt und damit den Stützvektor zu bestimmen,

setze ich bei $2x - y + 3z = 4 \wedge x + 2y - z = 1 \quad z = 0$ und erhalte:

$$2x - y = 4 \wedge x + 2y = 1.$$

$$x = 1,8; y = -0,4; z = 0$$

Die Gerade lautet: $g : \vec{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3 Lageuntersuchung zwischen einer Geraden und einer Ebene

Gerade und Ebene können wie folgt zu einander liegen.

- Entweder die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt
- Oder die Gerade liegt parallel zur Ebene
- Oder die Gerade ist Teilmenge der Ebene, liegt also in der Ebene

Die Lagebeziehungen haben wir vor kurzem noch sehr umständlich berechnet, indem wir die Geraden und Ebenen gleichgesetzt und dann Gleichungssysteme aufgestellt haben. Dies können wir mit unserem neuen Wissen nun viel schneller behandeln.

Betrachten wir folgende Unterscheiden bei der **Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene**:

1) Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt

Gegeben sei die Ebene $\varepsilon: 2x - 3y + z = 3$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man nun Aufschluss über die gegenseitige Lage machen: Für den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Geraden gilt:

$$\vec{n} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 + 3 - 2 = 5 \neq 0.$$

Damit sind die beiden Geraden nicht parallel. Sie können sich nur scheiden.

Aus g folgt: $x = -1 + 2t$; $y = 2 - t \wedge z = 1 - 2t$. Einsetzen in g ergibt:

$$2(-1 + 2t) - 3(2 - t) + 1 - 2t = 3$$

$$-2 + 4t - 6 + 3t + 1 - 2t = 3$$

$$-7 + 5t = 3$$

$$t = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ Der Schnittpunkt ist } S(3; 0; -3).$$

2) Gerade liegt in der Ebene

Gegeben sei die Ebene $\varepsilon : x + 3y - z = 4$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man nun Aufschluss über die gegenseitige Lage machen:

Für den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Geraden gilt:

$$\text{Da } \vec{n} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 - 3 + 2 = 0$$

Damit sind die beiden Geraden parallel. Nun muss noch überprüft werden, ob die Gerade in der Ebene liegt. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

1.MÖGLICHKEIT:

Der Punkt $P(2;1;1)$ müsste in der Ebene liegen, wenn die Gerade in der Ebene liegt:

$2 + 3 - 1 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ Wahre Aussage. Damit liegt P in der Ebene und damit liegt die ganze Gerade in der Ebene

2.MÖGLICHKEIT:

Aus g folgt: $x = 2 + t; y = 1 - t \wedge z = 1 - 2t$. Einsetzen in g ergibt:

$$(2 + t) + 3(1 - t) - 1 + 2t = 4$$

$$2 + t + 3 - 3t - 1 + 2t = 4$$

$4 = 4$ Wahre Aussage. Damit liegt P in der Ebene und damit liegt die ganze Gerade in der Ebene.

3) Gerade ist parallel zur Ebene

Gegeben sei die Ebene $\varepsilon : x + 3y - z = 4$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man nun Aufschluss über die gegenseitige Lage machen:

Für den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Geraden gilt:

$$\text{Da } \vec{n} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 - 3 + 2 = 0$$

Damit sind die beiden Geraden parallel. Nun muss noch überprüft werden, ob die Gerade in der Ebene liegt. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

1. MÖGLICHKEIT:

Der Punkt $P(-3; 1; 2)$ müsste in der Ebene liegen, wenn die Gerade in der Ebene liegt:

$-3 + 3 - 2 \Leftrightarrow -2 = 4$ Falsche Aussage. Damit liegt P nicht in der Ebene und damit

liegt die ganze Gerade nicht in der Ebene

2. MÖGLICHKEIT:

Aus g folgt: $x = -3 + t$; $y = 1 - t \wedge z = 2 - 2t$. Einsetzen in g ergibt:

$$-3 + t + 3(1 - t) - 2 + 2t = 4$$

$$-3 + t + 3 - 3t - 2 + 2t = 4$$

$-2 = 4$ Falsche Aussage. Damit liegt P nicht in der Ebene und damit

liegt die ganze Gerade nicht in der Ebene.

Alternativ kann die Gerade also gleich in die Ebene eingesetzt werden.

Erhält man eine wahre Aussage, so liegt die Gerade in der Ebene, erhält man eine falsche Aussage, so ist die Gerade parallel zur Ebene und erhält man einen Wert für den Parameter, so schneiden sich die Gerade und die Ebene in einem Punkt.

Auch das Spatprodukt bietet eine andere Möglichkeit die Lage zwischen einer Geraden und einer Ebene zu untersuchen: Dies bietet sich an, wenn die Ebene in Parameterform gegeben ist.

1) Gegeben sei eine Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und eine Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen zunächst das Spatprodukt des Richtungsvektors der Geraden und der Richtungsvektoren der Ebene und somit die Vektoren auf lineare Abhängigkeit. Dies führen wir entweder mit Hilfe einer dreireihigen Determinante oder mit Hilfe der Definition des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ durch.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 + 16 - 21 = 0$$

Da das Spatprodukt 0 ist, sind die drei Vektoren linear abhängig und damit komplanar. Die Gerade ist also entweder zur Ebene parallel oder die Gerade liegt in der Ebene.

Um dies zu untersuchen, wenden wir die Formel $d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}|$ an. Mit

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50}$$

$$d = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = \left| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = \sqrt{1 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Die Gerade läuft also parallel zur Ebene.

Wäre der Abstand 0, so läge die Gerade in der Ebene.

2) Gegeben sei eine Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und eine Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen zunächst das Spatprodukt des Richtungsvektors der Geraden und der Richtungsvektoren der Ebene und somit die Vektoren auf lineare Abhängigkeit. Dies führen wir entweder mit Hilfe einer dreireihigen Determinante oder mit Hilfe der Definition des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ durch.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 + 16 - 21 = 0$$

Da das Spatprodukt 0 ist, sind die drei Vektoren linear abhängig und damit komplanar. Die Gerade ist also entweder zur Ebene parallel oder die Gerade liegt in der Ebene.

Um dies zu untersuchen, wenden wir die Formel $d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}|$ an. Mit

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50}$$

$$d = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right| \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = \left| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right| \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} = 0.$$

Die Gerade liegt also in der Ebene.

3) Gegeben sei eine Ebene $\mathcal{E} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und eine Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen zunächst das Spatprodukt des Richtungsvektors der Geraden und der Richtungsvektoren der Ebene und somit die Vektoren auf lineare Abhängigkeit. Dies führen wir entweder mit Hilfe einer dreireihigen Determinante oder mit Hilfe der Definition des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$ durch.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5 + 2 - 3 = -6 \neq 0$$

Da das Spatprodukt nicht 0 ist, sind die drei Vektoren nicht linear abhängig und damit nicht komplanar.

Die Gerade schneidet die Ebene also in einem Punkt.

Wir berechnen den Schnittpunkt. Dazu formen wir die Ebenengleichung in Normalenform bzw. in Normalform um. Bestimme also zuerst einen Normalenvektor, der auf beiden Spannvektoren der Ebene senkrecht steht mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Wende die Formel } (\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0 \text{ an.}$$

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -12.$$

Aus g folgt: $x = -3t$; $y = 1 - 2t$; $z = 1 - t$.

$$5(-3+t) + 2(1-2t) + 1-t = 12$$

$$-15 + 5t + 2 - 4t + 1 - t = -12$$

$$t = -3$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$S(-1; 0; -7)$ ist also der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

Dieses Verfahren kann eingeschlagen werden, wenn Gerade und Ebene in Parameterform angegeben sind oder wenn in einer Folgeaufgabe der Abstand zu berechnen ist.

5 Abstandsaufgaben

5.1 Projektionsverfahren

5.1.1. Abstand Punkte – Gerade im \mathbb{R}^2 bzw. Punkt – Ebene im \mathbb{R}^3

Gegeben seien ein Punkt P_1 und eine Gerade g (bzw. eine Ebene) durch die Hesseform
 $\vec{x} \cdot \vec{e}_n = \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n = p$.

Die Abbildung 1 verdeutlicht, dass man den gesuchten Abstand d leicht ermitteln kann, wenn man durch den Punkt P_1 eine zu g (bzw. zur Ebene) parallele Gerade (bzw. Ebene) gelegt denkt.

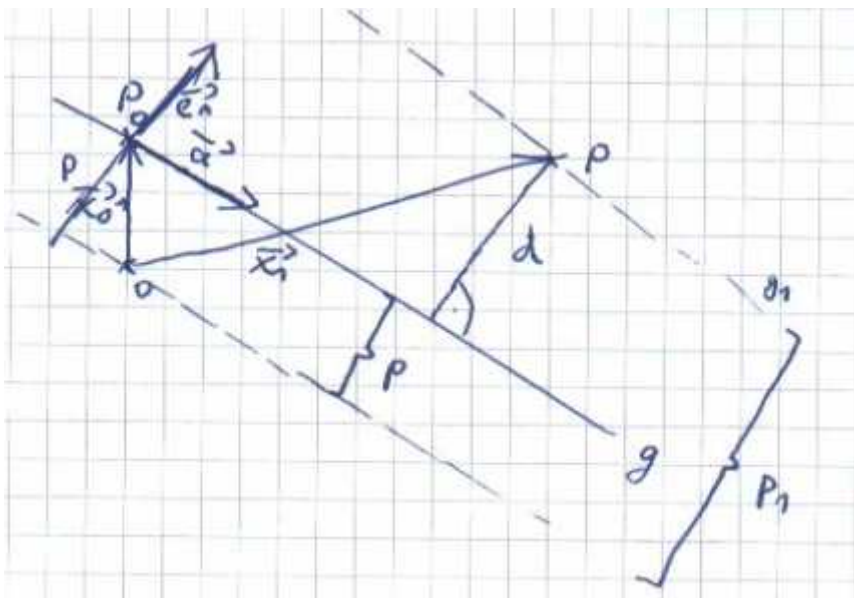


Abb. 24 Abstand eines Punktes von einer Geraden (Ebenen) jenseits des Ursprungs

Wir betrachten also zuerst den Fall, dass der Punkt P jenseits des Ursprungs liegt.
 Aus der Abbildung 1 werden folgende Beziehungen deutlich:

$$p + d = p_1 \Leftrightarrow d = p_1 - p$$

$$p = \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n \text{ (Hesseform)}$$

$$p_1 = \vec{x}_1 \cdot \vec{e}_n \wedge d = p_1 - p = \vec{x}_1 \cdot \vec{e}_n - \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n = \vec{e}_n (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$$

Der „Trick“ liegt also bei dem so genannten Projektionsverfahren, dass man den Abstand auf den Einheitsnormalenvektor projiziert.

Nun behandeln wir, wie wir den Abstand eines Punktes von einer Geraden (bzw. einer Ebenen) berechnet, wenn er diesseits des Ursprungs liegt.

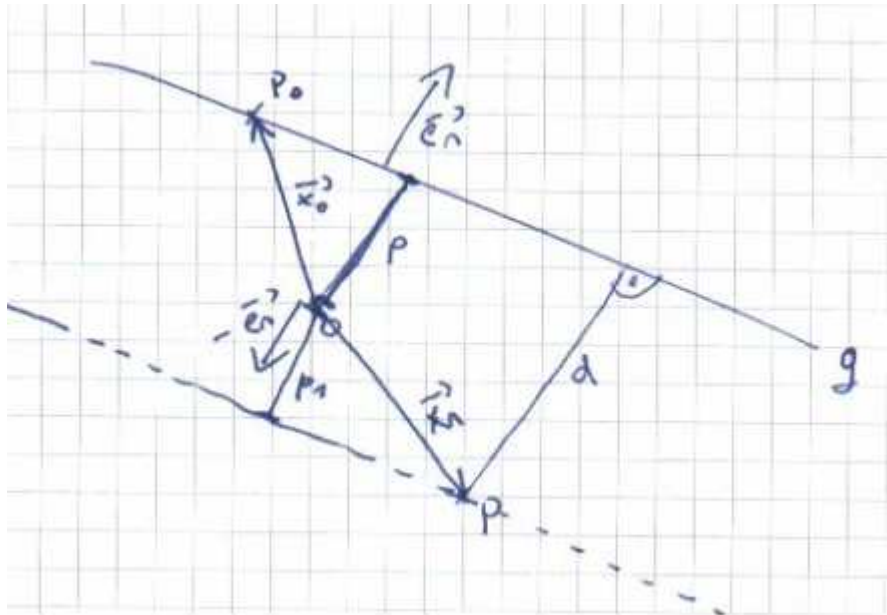


Abb. 25 Abstand eines Punktes zu einer Geraden (Ebenen) diesseits des Ursprungs

Auch hier erhalten wir folgende Beziehungen:

$$p = \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n \text{ (Hesseform)}$$

$$p_1 = \vec{x}_1 \cdot (-\vec{e}_n)$$

$$d = p_1 + p = \vec{x}_1 \cdot \vec{e}_n + \vec{x}_1 \cdot (-\vec{e}_n) = \vec{e}_n (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)$$

Der Unterschied liegt nun im Einheitsnormalenvektor, von dem wir den Gegenvektor verwenden müssen (vgl. Abbildung 2).

Wir können diese beiden Fälle zusammenfassen, da sich $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_0 - \vec{x}_1$ nur im Vorzeichen unterscheiden:

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n|$$

Bestimmung des Abstands von einem Punkt zu einer Geraden im \mathbb{R}^2 bzw. einer Ebenen im \mathbb{R}^3 mit dem Projektionsverfahren.

Dies gilt natürlich auch für eine Ebene im \mathbb{R}^3 .

Eine weiterer, aber sehr umständlicher Weg, ist folgender. Auch dieser sei Vollständigkeithalber anzuführen:

Im folgenden Abschnitt soll gezeigt werden, wie man den Abstand eines Punktes P_0 zu einer Ebene bestimmen und damit berechnen kann, die durch eine Gleichung in Normalform gegeben ist.

Vorgehensweise:

1. Zuerst berechnet man mit Hilfe des Normalenvektors der Ebene diejenige Gerade g , die durch den Punkt P_0 geht und auf der Ebene senkrecht steht.

2. Nun bestimmt man den Punkt P_1 , in dem die Gerade g die Ebene schneidet. Die Entfernung der Punkte P_0 und P_1 ist der gesuchte Abstand.

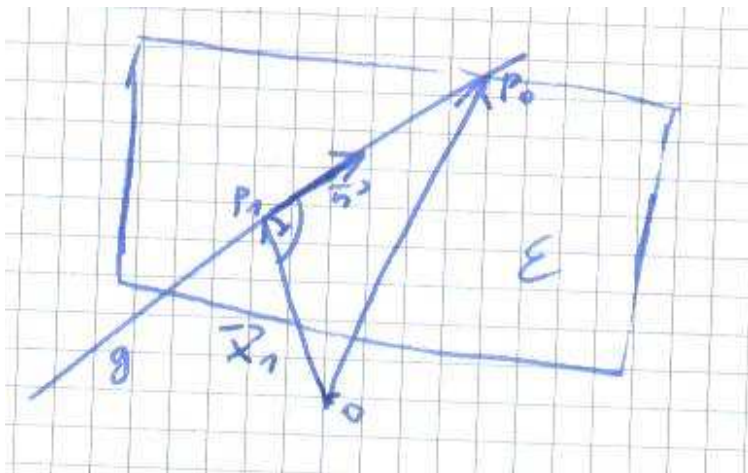


Abb. 26 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Beispiele:

Wir geben ein Beispiel:

Es soll der Abstand des Punktes P_0 zur Ebene berechnet werden.

a) $P_0(2; 3; 2); \varepsilon: x - y - z = 3$

Lösungen:

a) $P_0(2;3;2); \mathcal{E}: x - y - z = 3$

Aus $x - y - z = 3$ folgt $\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$.

Der Normalenvektor lautet also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Gerade g hat also mit dem Ortsvektor des

Punktes als Stützvektor die Parametergleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nun muss der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene berechnet werden. Dazu forme

ich die Normalform der Ebene in Parameterform um und erhalte: $\mathcal{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gleichsetzen der Ebene und der Gerade ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ Aufstellen einer Matrix liefert:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Aus III. folgt $t = 3$. Einsetzen von $t = 3$ in die Gerade liefert:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Nun kann } d \text{ berechnet werden:}$$

$$\vec{d} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

5.1.2. Abstand paralleler Geraden im \mathbb{R}^2 und paralleler Ebenen im \mathbb{R}^3

Mit dem gleichen Verfahren, also mit dem Projektionsverfahren, kann auch der Abstand zweier paralleler Geraden g_1 und g_2 und zweier paralleler Ebenen berechnet werden. Man hat jeweils einen Verbindungsvektor zwischen beliebigen Punkten der beiden Geraden (bzw. der beiden Ebenen) in die gemeinsame Normalenrichtung der beiden Geraden (bzw. der beiden Ebenen) projiziert und somit gilt die Formel:

$$d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{e}_n|$$

Beispiel:

Gegeben sei die Ebene ε_1 durch $2x - 3y + 5z = -2$ und die Ebene ε_2 durch $-4x + 6y - 10z = 8$.

Für die Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ gilt $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, daher sind

die beiden Ebenen parallel.

Es gilt: $|\vec{n}_1| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$; $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Nun müssen wir uns einen Punkt in der

ersten Ebene und einen Punkt in der zweiten Ebene wählen.

Der Punkt $P_1(-1;0;0)$ liegt in der ersten Ebene und der Punkt $P_2(-2;0;0)$ liegt in der zweiten Ebene.

Weiterhin gilt: $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit: $d = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 0,324$.

5.1.3 Abstand einer Geraden von einer dazu parallelen Ebene

Beispiel:

Gegeben sei die Ebene ε_1 durch $x - y - 3z = 4$ und die Gerade g durch:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir müssen zuerst zeigen, dass die Gerade parallel zur Ebene ist.

Das ist dann der Fall, wenn der Richtungsvektor auf dem Normalenvektor der Ebene

senkrecht steht, also das Skalarprodukt 0 ist: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0$. Also liegt

die Parallelität vor!

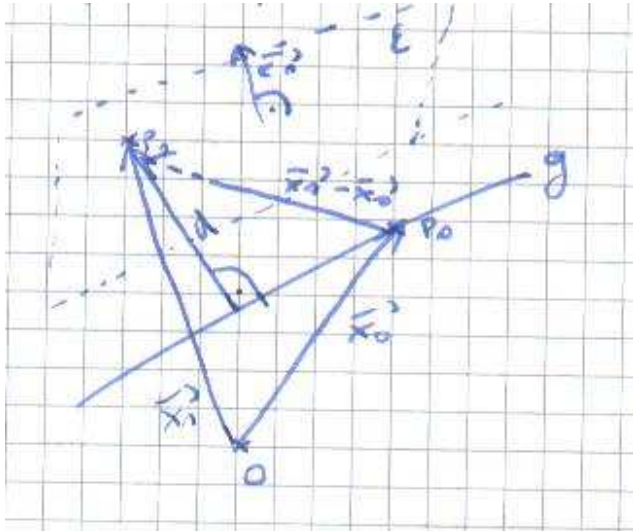


Abb. 27 Abstand einer Geraden und dazu parallelen Ebene

Wir können auch hier einen beliebigen Verbindungsvektor $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ zwischen Ebenen und Gerade in die gemeinsame Normalenrichtung projizieren:

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n|$$

Nun ist $|\vec{n}| = \sqrt{11}$; $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ein Punkt der Ebene ist gegeben durch:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Somit gilt: } \vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow d = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 0,302.$$

5.2 Lotfußpunktverfahren

Das Projektionsverfahren ist nur für eine Gerade im \mathbb{R}^2 und eine Ebene im \mathbb{R}^3 geeignet, da es im \mathbb{R}^3 für die Geraden unendlich viele Normalenvektoren gibt, die Normalenrichtung also nicht eindeutig bestimmt ist. Daher muss ein anderes Verfahren gefunden werden:

5.2.1. Abstand Punkt – Gerade im \mathbb{R}^3

Wir betrachten folgenden Fall im \mathbb{R}^3 :

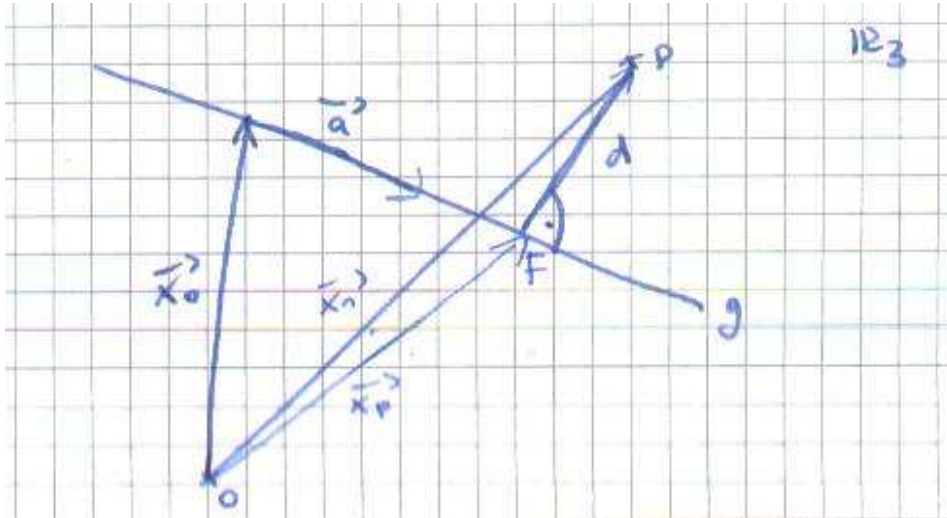


Abb. 28 Lotfußpunktverfahren für Abstand eines Punkt und einer Geraden im \mathbb{R}^3

Damit gilt: $\vec{d} = \vec{x}_1 - \vec{x}_F \wedge \vec{x}_F = \vec{x}_0 + t\vec{a}$.

Einsetzen von \vec{x}_F in \vec{d} ergibt:

$$\vec{d} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 - t\vec{a}.$$

Da $\vec{a} \perp \vec{d}$, gilt: $\vec{d} \cdot \vec{a} = 0$

Einsetzen von $\vec{d} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 - t\vec{a}$ liefert:

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_0 - t\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$t = \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

damit lässt sich nun der Parameter t bestimmen, $|\vec{d} \wedge \vec{d}|$ lässt sich somit auch bestimmen, also der gesuchte Abstand zwischen P und g .

Beispiel:

Gegeben: $P_1(1; -3; -3); g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 12 = -11$.

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 + 9 + 11 = 11$. Also: $t_F = \frac{-11}{11} = -1$.

Der Fußpunkt ist also gegeben durch:

$\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ferner ist:

$\vec{d} = \vec{x}_1 - \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $|\vec{d}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} = 2,45$.

Eine andere Möglichkeit ist diese:

Eine Gerade sei gegeben durch $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$. Ein Punkt P_1 sei gegeben durch den Ortsvektor \vec{x}_1 . Wir ersetzen zunächst die Richtungsvektoren durch den zugehörigen Einheitsvektor

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Dann gilt für den Abstand $d = |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| \sin \alpha$, wobei der Winkel die Größe

des Winkels zwischen $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 \wedge \vec{a}$ bezeichnet. Fügt man nun noch den Faktor

$|\vec{e}_a| = 1$ hinzu, so erhält man nach Definition des Vektorprodukts

$d = |\vec{x}_1 - \vec{x}_0| |\vec{e}_a| \sin \alpha = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{e}_a|$.

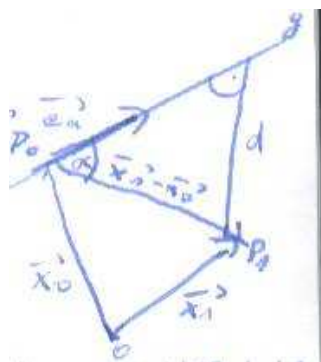


Abb. 29 Lageuntersuchungen mit Hilfe des Vektorprodukts

Die Plückerform einer Geraden lautet $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{x}_0 \times \vec{a}$ bzw. $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = 0$.

Ersetzt man \vec{a} durch den zugehörigen Einheitsvektor $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, so erhält man

$(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{e}_a = 0$. Setzt man in \vec{x} die Koordinaten eines Punktes der Geraden ein, so ist die Gleichung erfüllt. Setzt man dagegen die Koordinaten eines anderen Punktes P_1 ein, der nicht auf der Geraden liegt, so erhält man statt des Nullvektors einen Vektor, dessen Betrag den Abstand des Punktes von der Geraden angibt:

$$d = |(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{e}_a|.$$

Beispiel:

$$\text{Gegeben sei } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; |\vec{a}| = \sqrt{11}; \vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{e}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{16 + 1 + 49} = \sqrt{\frac{66}{11}} = \sqrt{6} = 2,45.$$

Auch damit können wir den Abstand eines Punktes zu einer Geraden im \mathbb{R}^3 berechnen!

5.2.2. Abstand paralleler Geraden im \mathbb{R}^3

Da parallele Geraden g_1 und g_2 überall den gleichen Abstand haben, braucht man nur den Abstand eines Punktes auf g_1 oder g_2 bestimmen und dann nach dem unter 1. vorgegebenen Lotfußpunktverfahren vorgehen.

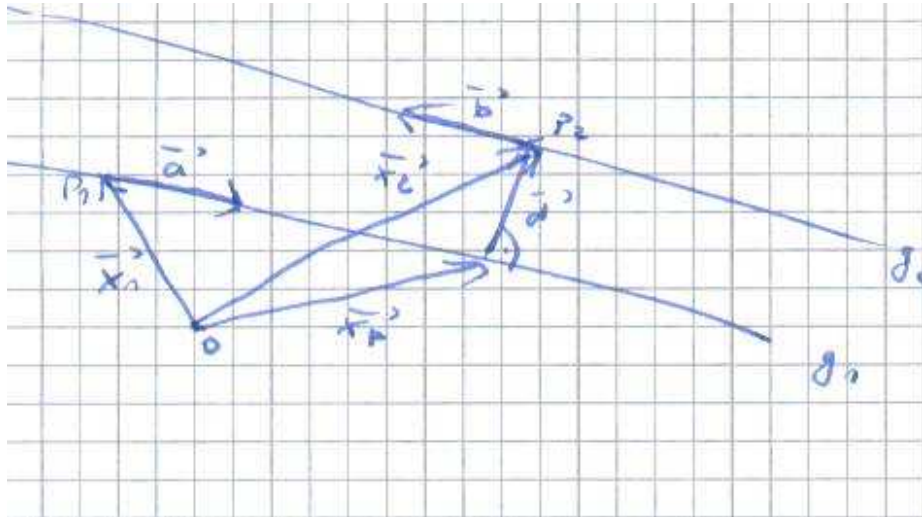


Abb. 30 Lotfußpunktverfahren bei parallelen Geraden im \mathbb{R}^3

5.2.3. Abstand windschiefer Geraden im \mathbb{R}^3

Sind zwei Geraden g und h mit nicht kollinearen Richtungsvektoren gegeben, so können diese Geraden windschief sein oder sich in einem Punkt schneiden. Da bereits die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen einem Punkt und einer Geraden auf der Geraden senkrecht steht, ist es plausibel, dass eine Strecke nur dann die kürzeste Verbindung zwischen zwei windschiefen Geraden sein kann, wenn sie auf beiden Geraden senkrecht steht. Es ist aber nicht von vornherein klar, dass es überhaupt eine solche Verbindungsstrecke gibt, und auch nicht, ob es nur eine solche Strecke gibt, die auf beiden Geraden senkrecht steht. Wir können aber versuchen, zwei Punkt G auf g und H auf h so zu bestimmen, dass die Strecke GH auf g und auf h senkrecht steht. Es wird sich dann herausstellen, ob es eine solche Strecke gibt und ob sie eindeutig bestimmt ist.

Zwei Geraden seien gegeben durch $\vec{x} = \vec{x}_1 + r\vec{a}$ und $\vec{x} = \vec{x}_2 + s\vec{b}$.

Die Bedingung für den Verbindungsvektor der beiden Lotfußpunkte

G und H : $\vec{d} = \vec{x}_H - \vec{x}_G$ lautet: $\vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \wedge \vec{d} \cdot \vec{b} = 0$.

Für die Parameterwerte r und s der beiden Lotfußpunkte gilt dann:

$\vec{x}_H = \vec{x}_1 + r\vec{a}$ und $\vec{x}_G = \vec{x}_2 + s\vec{b}$ und somit: $\vec{d} = \vec{x}_H - \vec{x}_G = \vec{x}_1 + r\vec{a} - \vec{x}_2 - s\vec{b}$.

Aus $\vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \wedge \vec{d} \cdot \vec{b} = 0$ folgt:

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{a} - r(\vec{a} \cdot \vec{a}) + s(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{b} - r(\vec{a} \cdot \vec{b}) + s(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 0.$$

Beispiel:

$$\text{Gegeben: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 13 + 14 - 3 = 24;$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 26 - 21 = 5 \text{ Weiterhin gilt:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 + 4 + 9 = 14; \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 = -4; \vec{b} \cdot \vec{b} = 4 + 9 = 13$$

Das LGS lautet damit:

$$24 - 14r - 4s = 0$$

$$5 + 4r + 13s = 0$$

Dieses LGS lösen wir auf und erhalten: $r = 2 \wedge s = -1$.

$$\text{Die Fußpunkte sind also gegeben durch: } \vec{x}_G = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \vec{x}_H = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} :$$

$$\vec{d} = \vec{x}_H - \vec{x}_G = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}; |\vec{d}| = \sqrt{81 + 36 + 49} = \sqrt{166} = 12,9.$$

Wenn man vergessen hat, die beiden Richtungsvektoren auf Kollinearität zu überprüfen, kommt man dennoch zum Ziel:

Gegeben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}; (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - 8 - 3 = -12;$$

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 16 + 6 = 24 \text{ Weiterhin gilt:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 6; \vec{a} \cdot \vec{b} = -12; \vec{b} \cdot \vec{b} = -24$$

Das LGS lautet damit:

$$-12 - 6r - 12s = 0$$

$$24 + 12r + 24s = 0$$

Dieses LGS lösen wir auf und erhalten: $r = 0 \wedge s = -1.$

Die Fußpunkte sind also gegeben durch: $\vec{x}_G = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \vec{x}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}:$

$$\vec{d} = \vec{x}_H - \vec{x}_G = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; |\vec{d}| = \sqrt{2}.$$

5.3 Alternativ-Verfahren zum Lotfußpunktverfahren

Da das Lotfußpunktverfahren in gewissen Sinne sehr aufwendig sein kann (im Rechenaufwand), wollen wir in diesem Abstand eine Alternative zum Lotfußpunktverfahren vorstellen.

5.3.1. Abstand Punkt – Gerade im \mathbb{R}^3

Beispiel:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

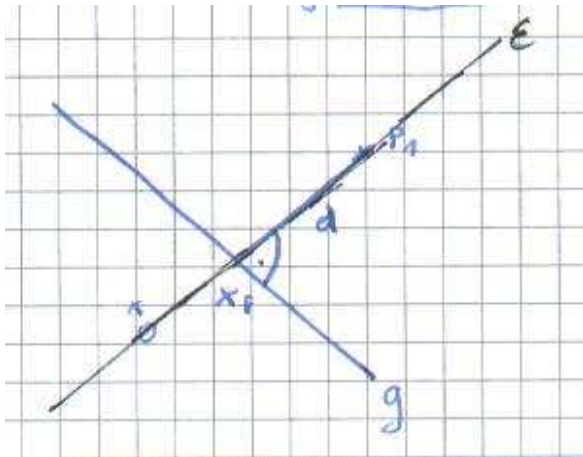


Abb. 31 Alternativ-Verfahren zum Lotfußpunktverfahren – Abstand Punkt – Gerade in \mathbb{R}^3

Wir wählen uns eine Hilfsebene, die senkrecht auf der Geraden g steht und durch den Punkt P_1 verläuft. Hier gibt es nur eine ganz bestimmte Ebene, die diese Eigenschaften erfüllt.

Als Normalenvektor nehmen wir den Richtungsvektor der Geraden g , denn der Normalenvektor steht, wie der Richtungsvektor der Geraden g , auf der Ebene senkrecht. Damit die Ebene durch den Punkt P_1 verläuft, müssen wir den Normalenvektor mit dem Vektor zum Punkt P_1 multiplizieren. Wir erhalten:

$$\mathcal{E}_{\text{Hilfsebene}} : \vec{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{\text{Hilfsebene}} : \vec{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 11$$

Der Fußpunkt x_F ist gleichzeitig Schnittpunkt von der Geraden und der Ebene.

Wir müssen also den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene berechnen.

Aus g folgt: $x = 1 + t$; $y = -t$; $z = 2 - 4t$. Dies setzen wir in die Normalform der Ebene ein und erhalten dem entsprechend:

$$1 + t + t - 4(2 - 4t) = 11$$

$$1 + 2t - 8 + 16t = 11$$

$$t = 1$$

Einsetzen von $t = 1$ in die Gerade ergibt den gesuchten Fußpunkt:

$$\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{d} = \vec{x}_1 - \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; |\vec{d}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6.$$

5.3.2. Abstand paralleler Geraden oder paralleler Ebenen im \mathbb{R}^3

Um den Abstand paralleler Geraden oder paralleler Ebenen im \mathbb{R}^3 berechnen zu können, wählen wir uns einfach einen Punkt auf der Geraden oder auf der Ebene und berechnen den Abstand dieses Punktes zu der Geraden bzw. zu der Ebene, da alle Punkte auf der Geraden bzw. auf der Ebene den gleichen Abstand zu der anderen Gerade bzw. der anderen Ebene hat.

5.3.3. Abstand windschiefer Geraden im \mathbb{R}^3

Beispiel:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Überprüft sei schon, dass die Geraden windschief sind. Dazu haben wir an den Richtungsvektoren gesehen, dass der eine kein Vielfaches des anderen ist, die Geraden also nicht parallel sind. Wir haben die Geraden gleichgesetzt, ein LGS aufgestellt und keine Lösung, sondern eine falsche Aussage, erhalten und konnten damit sagen, dass die Geraden windschief sein müssen. Nun soll der Abstand mit einem Alternativ-Verfahren berechnet werden:

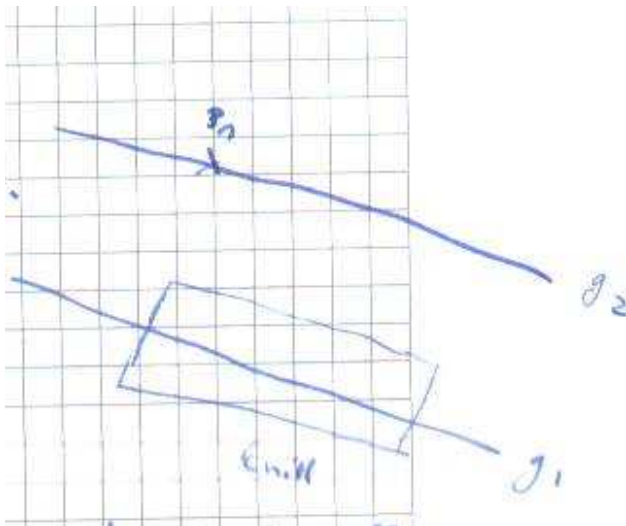


Abb. 32 Alternativ-Verfahren zum Lotfußpunktverfahren – Abstand zweier windschiefer Geraden

Wir müssen eine Hilfsebene wählen, die parallel zu den beiden Geraden. Hierzu nehmen wir die beiden Richtungsvektoren der beiden Geraden als Spannvektoren der Ebene. Weiterhin können wir nun einen der Stützvektoren der Geraden als Stützvektor der Ebene wählen. In unserem Fall lege dann die erste Gerade in der Ebene:

$$\mathcal{E}_{\text{Hilfsebene}}: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nun muss also der Abstand der zweiten Gerade zu der Ebene berechnet werden.

Hierzu wählen wir uns einen Punkt auf der zweiten Geraden und berechnen mit Hilfe des Projektionsverfahren den Abstand dieses Punktes zu der Ebene.

Wir nehmen die Punkte $P_1(0; -2; -2)$ und $P_2(4; 1; 1)$ (Stützvektor der Ebene).

Zuerst muss der Normalenvektor der Ebene berechnet werden. Es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0$$

Den Normalenvektor, der auf beiden Spannvektoren der Ebene senkrecht steht, berechnen wir mit Hilfe des Kreuzprodukts:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor lautet also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$.

$|\vec{n}| = \sqrt{49 + 1 + 16} = \sqrt{66}$; $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Anwendung der Formel: $d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{e}_n|$:

$$d = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 3,95.$$

Florian Modler

Alle Beispiele und Herleitungen habe ich dem Buch „Mathematik Sekundarstufe II – Analytische Geometrie und lineare Algebra“ aus dem Cornelsen – Verlag von Professor Dr. Josef Lauter entnommen.

Eine Rezension über dieses wirklich sehr anschauliche, gut strukturierte und sehr gut ausgearbeitete Mathematikbuch kann unter folgendem Link eingesehen werden:

<http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/reviews.php?op=showcontent&id=184>

Hier ist auch ein Link direkt zu Cornelsen, mit dem man das Buch erwerben kann.