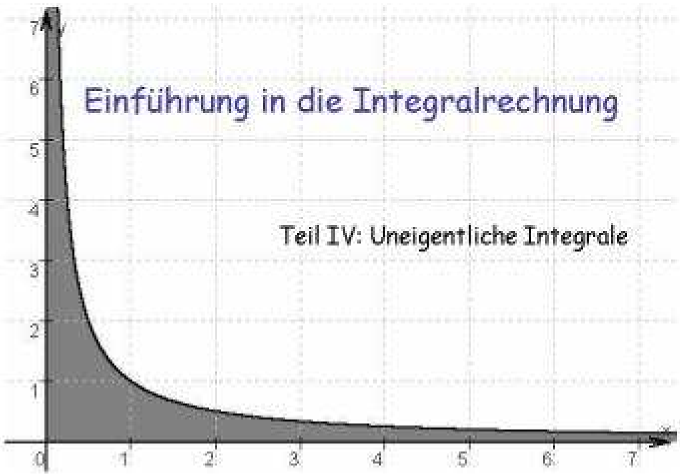
Uneigentliche Integrale



Gelegentlich gibt es Flächen, die "ins Unendliche" reichen. So spielt zum Beispiel in der Stochastik die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ eine Rolle. Sie reicht nach zwei Seiten ins Unendliche.

Mit solchen, liebe Schüler und Schülerinnen, ins Unendliche reichende Flächen, ihrem Flächeninhalt und einer entsprechenden Erweiterung des Integralsbegriffs wollen wir uns hier beschäftigen.

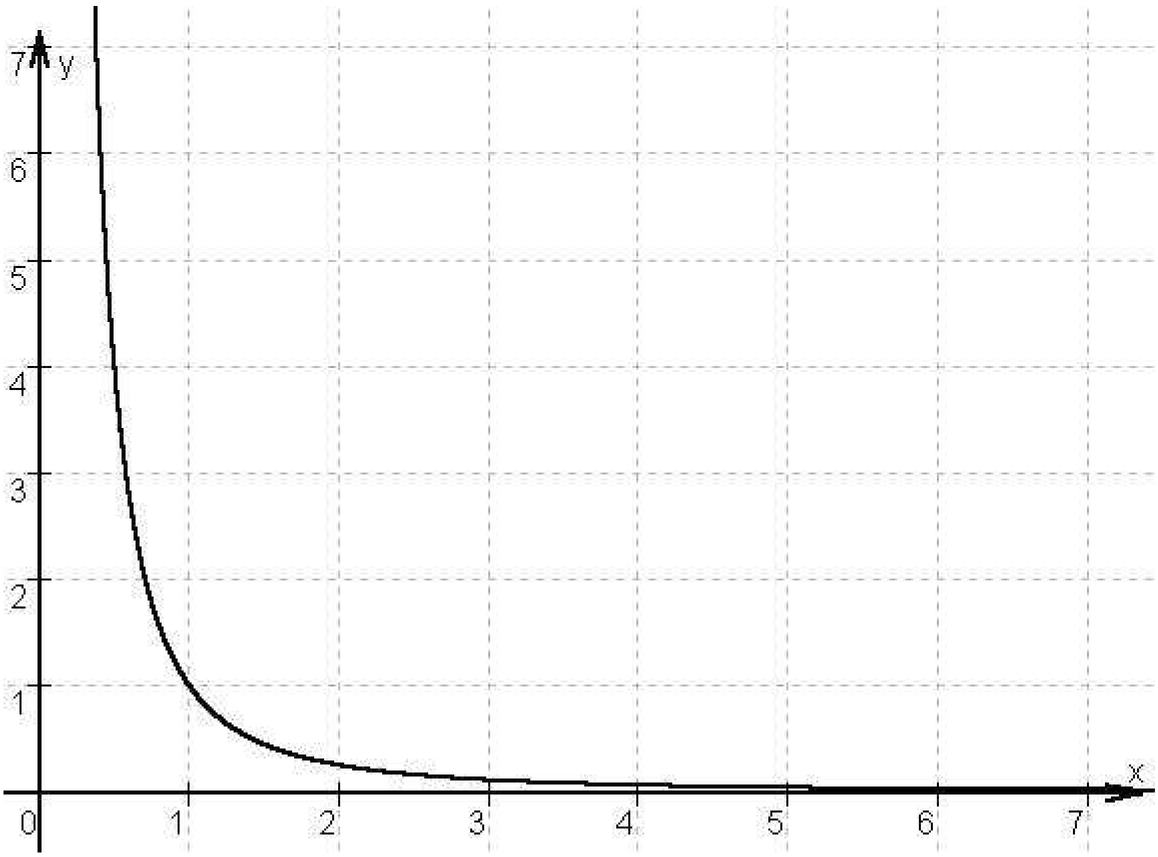
Es ist nun mein vierter Teil von "Einführung in die Integralrechnung".
Es gibt noch viele Gebiete, in denen man die Integralrechnung anwenden kann. Ein fünfter Teil wird demnach auf jeden Fall noch folgen.
Aber jetzt erstmal viel Spaß mit meinem kleinen Einblick in die Integralrechnung, genauer in das Gebiet der **Uneigentlichen Integrale**.

Teil 1: Einführung in die Integralrechnung
Teil 2: Stammfunktionen & Co
Teil 3: Rotationskörper
Teil 4: Uneigentliche Integrale

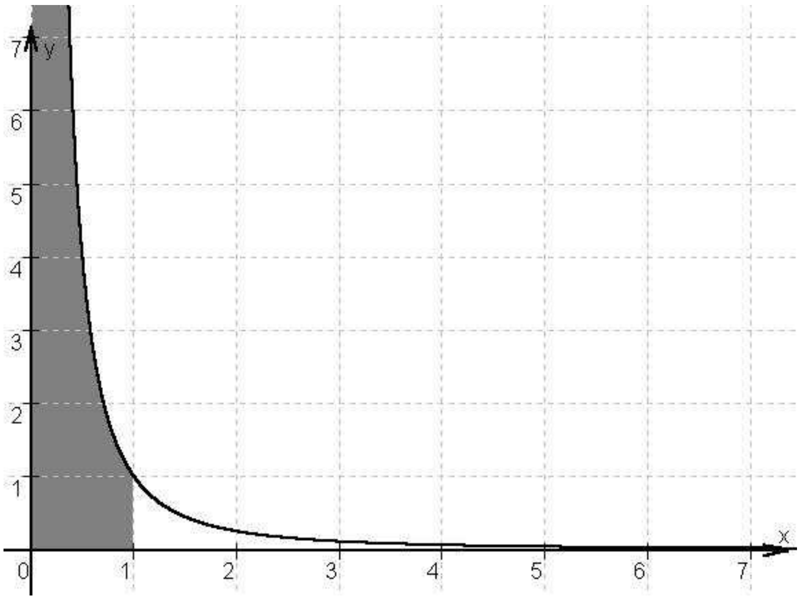
Inhalt

1 Ein paar Beispiele mit Lösungen

Schauen wir uns am Anfang die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ an . Und zwar nur den Teil im 1. Quadranten.



Wenn wir nun die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen wollen, stellen wir fest, dass die y – Achse eine Asymptote ist und es somit keinen Schnittpunkt mit der y – Achse gibt.
Dies sieht man sehr schön am Graphen. Die grau markierte Fläche soll berechnet werden.



Die Fläche "reicht ins Unendliche". Zu ihrer Berechnung kann man das

Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil f nicht im ganzen
Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist f unbeschränkt.

Zur Berechnung der Fläche verspricht folgender Gedanke Aussicht auf Erfolg.
Wir berechnen $\int_a^1 f(x)\,dx$ (für $0 < a < 1$) und bestimmen den Grenzwert

$\lim\limits_{a \to 0} \int_a^1 f(x)\,dx$ $(a > 0)$.

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion f.

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$; $F(x) = \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$

Somit erhalten wir, wenn wir unsere Idee fortsetzen:

$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a \to 0} -1 + \frac{1}{a}$$

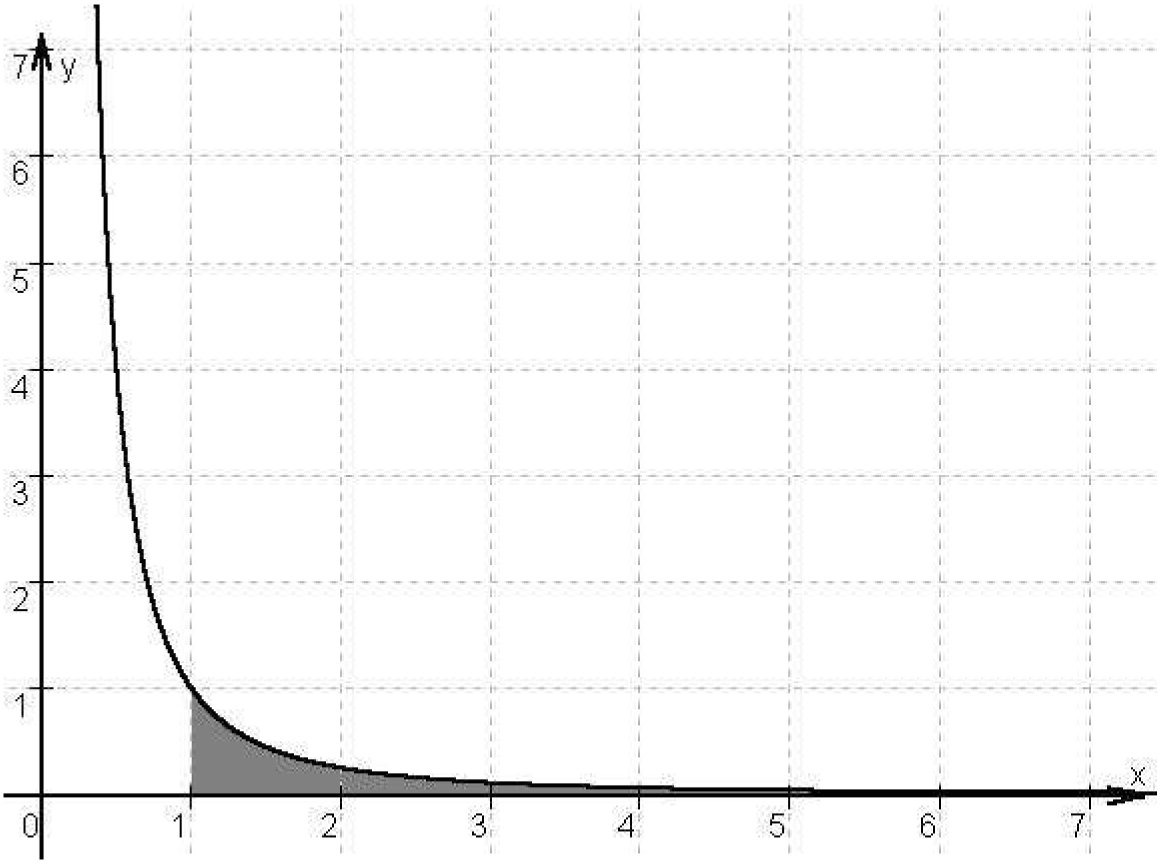
Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{a}$ nicht existiert. Gibt es also doch keinen Grenzwert? Ist unsere Idee doch nicht so aussichtsreich, wie wir uns das gedacht haben?
Wir halten fest:

Satz:
Für $a \to 0$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von a bis 1 jede Schranke.

Nicht verzweifeln, nehmen wir einfach ein weiteres Beispiel.

Wir wollen von dieser Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ die Fläche über dem Intervall $[1; \infty]$ berechnen.

Die zu berechnende Fläche sieht wie folgt aus:



Wir gehen zur Berechnung dieser Fläche wie oben vor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{b} + \lim_{b \to \infty} 1 = 0 + 1 = 1$$

Die Fläche von f über diesem Intervall beträgt also 1.

Wir sehen, dass unsere Idee doch nicht so schlecht ist.

Halten wir erst einmal unser Ergebnis fest:

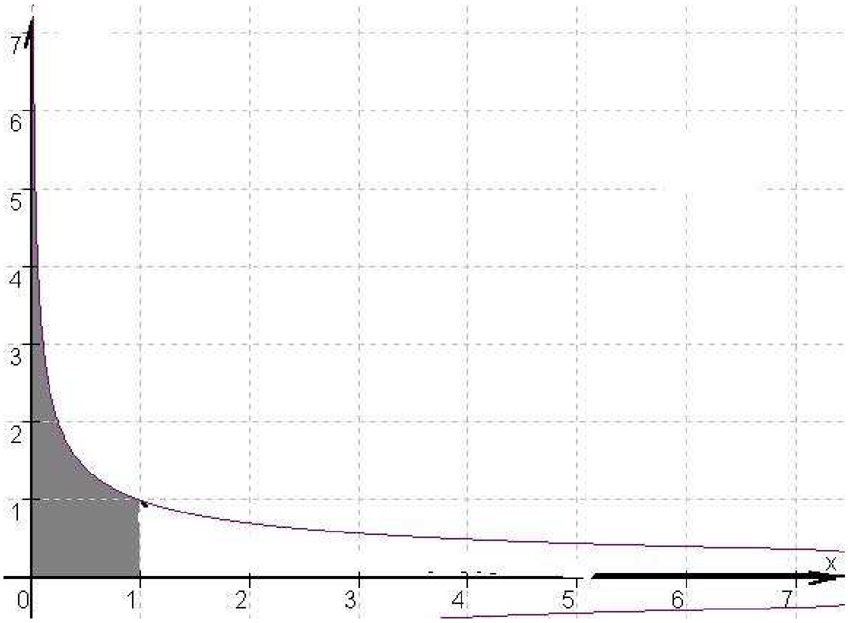
Satz:

Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von 1 bis Unendlich hat den Flächeninhalt 1.

Weil es so gut geklappt hat, nehmen wir uns nun eine zweite Funktion.

Und zwar g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Die über dem Intervall [0; 1] zu berechnende Fläche sieht wie folgt aus:



Auch hier wollen wir die Fläche über dem Intervall [0; 1] berechnen.
Auch hier stoßen wir auf das gleiche Problem wie oben. Die Fläche "reicht ins Unendliche". Zu ihrer Berechnung kann man das Integral $\int_0^1 g(x)\,dx$ nicht verwenden. Denn dieses Integral ist nicht definiert, weil g nicht im ganzen Intervall [0; 1] definiert ist. Außerdem ist g unbeschränkt.
Zur Berechnung der Fläche gehen wir mit derselben Methode wie oben vor.
Wir berechnen $\int_a^1 g(x)\,dx$ (für $0 < a < 1$) und bestimmen den Grenzwert

$\lim\limits_{a \to 0} \int_a^1 g(x)\,dx$ $(a > 0)$.

Wollen wir dies also mal tun. Zur Berechnung benötigen wir die Stammfunktion der Funktion g.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\ ;\ G(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot x^{-\frac{1}{2}+1} = 2 \cdot \sqrt{x}$$

Wir berechnen den Flächeninhalt:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a \to 0} \left[2 \cdot \sqrt{x}\right]_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0} (2 - 2 \cdot \sqrt{a}) = \lim_{a \to 0} 2 - \lim_{a \to 0} 2 \cdot \sqrt{a} = 2 - 0 = 2$$

Satz:

Der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ von 0 bis 1 beträgt 2.

Berechnet auch hier die Fläche über dem Intervall [1; ∞]:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[2 \cdot \sqrt{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (2 \cdot \sqrt{b} - 2) = \lim_{b \to \infty} 2 \cdot \sqrt{b} - \lim_{b \to \infty} 2$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim_{b \to \infty} 2 \cdot \sqrt{b}$ beliebig groß wird.

Satz:
Für $b \to \infty$ übersteigt der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ von 1 bis b jede Schranke.

2 Definition des uneigentlichen Integrals

Meine Beispiele haben gezeigt, dass Flächen, die "ins Unendliche reichen", einen endlichen Flächeninhalt haben können. Hierbei kann einmal der Fall vorliegen, dass das "Intervall ins Unendliche reicht" oder zum anderen, dass die Funktion nicht im ganzen Intervall definiert ist (und dort unbeschränkt ist). Es ist daher nahe liegend, den Integralbegriff aus meinem ersten Teil der Serie zu erweitern.
Der Einfachheit halber setzen wir die Stetigkeit der Integrandenfunktion f voraus.

Definition:
(1) Die Funktion f sei stetig für alle $x > a$ bzw. für alle $x < b$. Dann sei:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^{c} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^{b} f(x)\,dx$$

(2) Die Funktion f sei stetig für]a; b] bzw. [a; b[. Dann sei:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{c \to a} \int_c^{b} f(x)\,dx \text{, falls f definiert ist für]a; b];}$$

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{c \to b} \int_a^{c} f(x)\,dx \text{, falls f definiert ist für [a; b[.}$$

Die Integrale links vom Gleichheitszeichen nennt man **uneigentliche Integrale.**
Existiert der Grenzwert rechts vom Gleichheitszeichen nicht, existiert das uneigentliche Integral nicht.

3 Abschluss

Ich hoffe, ihr wisst nun, was man unter uneigentlichen Integralen versteht.
Es freut mich, dass wir unsere Erkenntnisse aus dem 1. Teil meiner Serie
mit einer Erweiterung des Integralbegriffs erweitern konnten.
Seid gespannt auf den fünften Teil der Serie "Einführung in die Integralrechnung".

Euer
Florian Modler