Die Regeln von de l’Hospital

Von Florian Modler

Guillaume Francois Antoine de l’Hospital war ein französischer Mathematiker und Aristokrat.
Er wurde 1661 geboren und verstarb 1704 im Alter von 43 Jahren.
Wegen eines Augenleidens widmete sich de l’Hospital der Mathematik anstelle des Offiziersberufs.

De l’Hospital führte die Differential –und Integralrechnung in Frankreich ein. Außerdem hat de l’Hospital viele offene Fragen der Differential –und Integralrechnung gelöst.

In diesem Artikel will ich euch, liebe Schüler und Schülerinnen, die nach ihm benannten **Regel von de l’Hospital** etwas näher bringen.

Dieser Artikel erfordert Vorkenntnisse in Grenzwertsätzen und Ableitungsregeln.

Inhalt

1 Einleitung

Die Regeln von de l’Hospital bieten eine Möglichkeit, um Grenzwerte von Quotienten zu bestimmen. Die Regeln können angewendet werden, wenn Nenner und Zähler entweder beide gegen Null oder beide gegen Unendlich streben (und die Ableitungen von Nenner und Zähler existieren).
Klingt beim erstmaligen Lesen etwas komisch. Also fangen wir gleich mit einem Beispiel an.

2 Die erste Regel von de l’Hospital

2.1 Beispiel

Berechne folgenden Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$.
Wir erhalten $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos 0}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$
Existiert also kein Grenzwert? Wir haben doch gelernt, dass man nicht durch 0 dividieren kann. Was machen wir nun?

Ich will euch zeigen, dass doch ein Grenzwert existiert und wir diesen auch durch geschicktes Umformen des Terms berechnen können.

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ erweitern wir mit $1+\cos x$ und erhalten $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$.
Diesen Ausdruck im Zähler fassen wir nun mit Hilfe der dritten binomischen Formel zusammen:
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$.
$1-\cos^2 x$ ist gleich $\sin^2 x$. Dieses machen wir uns zu nutze und bekommen folgenden Ausdruck $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$.
Kürzen ergibt $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

Berechnen wir nun noch einmal den Grenzwert:
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin 0}{1+\cos 0}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$
Wir sehen, dass doch ein Grenzwert existiert.

2.2 Hinführung zur Regel

Wir wollen unsere Überlegungen nun verallgemeinern.
Es sei $f(a)=g(a)=0$. Versucht trotzdem $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ erweitern wir mit $\frac{1}{x-a}$ und erhalten $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}}$. Nun subtrahieren wir im Zähler f(a) und im Nenner g(a). Dies verändert am Ausdruck nichts, da wir jeweils 0 subtrahieren, denn $f(a)=g(a)=0$.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$. Dies Ausdruck sollte euch bekannt vorkommen. Es ist nämlich der Differenzenquotient.

Somit erhalten wir: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

Setzt man in der Lösung meiner Einstiegsaufgabe voraus, dass die Funktionen f und g an der Stelle a differenzierbar sind und dass $g'(a)\neq 0$, so erhalten wir die **1. Regel von de l’Hospital:**

2.3 Regel

Satz 1: 1. Regel von de l’Hospital:

Die Funktionen f und g seien an der Stelle a differenzierbar und es gelte $f(a)=g(a)=0$, sowie $g'(a)\neq 0$. Dann folgt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ kann nun also auch mit dieser Regel berechnet werden:

Es ist

$$f(x)=1-\cos x;\ f(0)=1-\cos 0=1-1=0;\ g(x)=\sin x;\ g(0)=\sin 0=0$$
$$f'(x)=\sin x;\ f'(0)=\sin 0=0;\ g'(x)=\cos x;\ g'(0)=\cos 0=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{1}=0$$

3 Die zweite Regel von de l'Hospital

3.1 Beispiel

Bestimmt wieder folgenden Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}(x\bullet\sin\frac{1}{x})$.
Auch hier vereinfachen wir den Ausdruck:

$$\lim_{x\to\infty}(x\bullet\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos 0=1$$

3.2 Regel

Satz 2: 2.Regel von de l'Hospital:

Es sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

Dann folgt: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, sofern der rechte Grenzwert existiert.

3.3 Beweis

Wir haben $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Hier führen wir eine Substitution durch $x=\frac{1}{z}$ und erhalten:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}.$$

Anwenden der 1. Regel von de l'Hospital, indem wir die Ableitungen (mit der Kettenregel) von der Zähler –und Nennerfunktion bilden, ergibt :

$\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z>0}} \frac{f'(\frac{1}{z}) \bullet (-\frac{1}{z^2})}{g(\frac{1}{z}) \bullet (-\frac{1}{z^2})}$. Mit Kürzen folgt: $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z>0}} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}$. Nun erfolgt die Rücksubstitution $\frac{1}{z} = x$:

$\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z>0}} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4 Mehrmaliges Anwenden der Regeln

Es kann vorkommen, dass man die Regeln mehrmals anwenden muss. Hierzu ein Beispiel:

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0}$

Also wenden wir die 1. Regel an.

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{6x^2 + 12x + 6}{2x + 2} = \frac{0}{0}$

Wir wenden die 1. Regel ein zweites Mal an und erhalten:

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{12x + 12}{2} = \frac{0}{2} = 0$

5 Schema zur Regel von de l'Hospital

Schematisch kann man zur Bestimmung des Grenzwertes eines Quotienten folgendermaßen vorgehen:

1) Es sei a eine reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen.

Weiterhin sei angenommen, dass sowohl f(x) als auch g(x) an der Stelle a differenzierbar sind. Falls a eine reelle Zahl ist, wird weiterhin vorausgesetzt, dass f(a) und g(a) existieren.

2) Es ist zu prüfen, ob an der Stelle a der Zähler und der Nenner beide gegen 0 oder beide gegen Unendlich streben. Hierzu setzt man a ein. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden (c und d sind nachfolgend reelle Zahlen, die ungleich Null sind):

2.1) Es ergibt sich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. (Anmerken möchte ich, dass ∞ nichts ist, mit dem man rechnen kann. Diese Darstellung erfolgt nur aus Vereinfachung.)
In diesen Fällen kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden.

Es gilt also: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Man muss somit zunächst die Ableitungen des Zählers und des Nenners bestimmen. Für die Bestimmung des neu entstandenen Grenzwertes kann man jetzt wieder mit Schritt 1) weitermachen, es kann also, wie oben gezeigt, vorkommen, dass man nochmals die Regeln anwenden muss.

2.2) Es ergibt sich $\frac{0}{c}$, $\frac{0}{\infty}$ oder $\frac{c}{\infty}$.
Der Grenzwert ist 0.

2.3) Es ergibt sich $\frac{d}{c}$.
Der Grenzwert lautet $\frac{d}{c}$.

2.4) Es ergibt sich $\frac{c}{0}$, $\frac{\infty}{0}$ oder $\frac{\infty}{c}$
Es existiert kein reeller Grenzwert.

6 Abschluss

So das war meine kleine Exkursion zum Thema „Die Regeln von de l'Hospital. Ich hoffe es hat euch gefallen und freut euch schon auf meine nächsten Artikel.
Bedanken möchte ich mich bei meinen Testlesern.

Euer
Florian Modler