Wie findet man eine Stammfunktion?

Von: FlorianM
Datum: Sa. 18. November 2006 21:05:24
Thema: Analysis

Einführung in die Integralrechnung

(Teil 6): Verfahren zur Bestimmung von Stammfunktionen

Im zweiten Teil meiner Serie "Einführung in die Integralrechnung" haben wir schon über Stammfunktionen gesprochen. Und ihr solltet auch in der Lage sein, eine Stammfunktion z.B. von der Funktion $f(x) = x^2 + e^x$ zu bilden, aber was macht ihr bei der Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ oder bei $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 (x - 1)^2}$?

Dazu bietet dieser Artikel nun drei Verfahren, um von solchen Funktionen eine Stammfunktion angeben zu können.
Diese Verfahren heißen Partielle Integration, Substitutionsverfahren und Partialbruchzerlegung.
Also viel Spaß beim Aneignen dieser sehr nützlichen Verfahren.

Inhalt

1 Partielle Integration

Das Integral einer Summe kann mit Hilfe der Summenregel aufgeteilt und dann berechnet werden. Ein Produkt aus zwei Funktionen kann man nicht entsprechend vereinfachen. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential – und Integralrechnung können wir Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen des Integranden berechnen. Daher ist es in diesem Zusammenhang nützlich, sich zu erinnern, welche Ableitungsregeln zu einem Produkt aus zwei Funktionen führen.

Wir erhalten ein Produkt von Funktionen bei der Anwendung der Produktregel und bei der Anwendung der Kettenregel. Aus diesen beiden Regeln werden wir Verfahren zur Integration über ein Produkt aus zwei Funktionen gewinnen.

1.1 Vorüberlegungen

Was macht man, wenn man zum Beispiel folgendes Integral berechnen möchte:

$$\int_a^b x \cdot \sin(x)\,dx\ ?$$

Leiten wir die Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$ zunächst einmal ab, und zwar mit Hilfe der Produktregel:

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

Nun subtrahieren wir $\sin(x)$:

$$f'(x) - \sin(x) = x \cdot \cos(x)$$

Beide Seiten werden nun integriert:

$$\int_a^b f'(x) - \sin(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \cos(x)\,dx$$

Nach der Summenregel gilt:

$$\int_a^b f'(x)\,dx - \int_a^b \sin(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \cos(x)\,dx$$

Eine Stammfunktion von $f'(x)$ können wir ohne Probleme angeben. Es ist die Funktion $f(x)$, denn $f(x)$ abgeleitet ergibt $f'(x)$.

Also gilt:

$$[x \cdot \sin(x)]_a^b - [-\cos(x)]_a^b = \int_a^b x \cdot \cos(x)\,dx$$

$$[x \cdot \sin(x) + \cos(x)]_a^b = \int_a^b x \cdot \cos(x)\,dx$$

Dies können wir ohne Probleme lösen.

Verallgemeinern wir also:

1.2 Allgemeine Überlegungen

Ziel muss es sein $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$ zu berechnen.

Idee: Gegeben sind die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$. Dann gilt:

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Nun gehen wir analog wie beim Beispiel vor:

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad | - u'(x) + v(x)$

$(u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int_a^b ((u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x))\,dx = \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$$

$$\int_a^b ((u(x) \cdot v(x))')\,dx - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$$

$$\left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$$

1.3 Partielle Integration auf einem Blick

Partielle Integration:

Die Gleichung $\left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$

ermöglicht oft die Integration eines Produkts von zwei Funktionen.

Beachte, dass es auch möglich ist, dass die partielle Integration mehrfach durchgeführt werden muss, bis ihr eine Stammfunktion von $v(x)$ angeben könnt.

Zum Vertiefen nun noch ein Beispiel:

Berechne $\int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx$:

Wir setzen $u(x) = x$ und $v'(x) = e^{-x}$.

Dann ist $u'(x) = 1$ und $v(x) = -e^{-x}$ eine Stammfunktion von $v'(x)$.

Durch partielle Integration (Anwenden der oben angeführten Formel) und Einsetzen erhält man:

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx = \left[x \cdot \left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-e^{-x}\right)dx = \left[x \cdot \left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$= \left[x \cdot \left(-e^{-x}\right) - e^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2 \cdot e^{-1}.$$

2 Das Substitutionsverfahren

Zuerst ein Beispiel:

Es soll folgendes Integral berechnet werden:

$$\int_a^b 2x \cdot \sin(x^2 + 3)\,dx$$

Eine Stammfunktion kann durch scharfes Hinschauen und unter Beachtung der Kettenregel direkt angegeben werden:

$F(x) = -\cos(x^2 + 3)$, denn mit Kettenregel folgt wieder:

$F'(x) = f(x) = 2x \cdot \sin(x^2 + 3)$.

Besitzt die Funktion folgende Bauart: $f(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, so gilt allgemein:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Nun liegt dieser einfache Fall aber nicht immer vor.

Was machen wir, wenn der Integrand nicht die Bauart $f(g(x)) \cdot g'(x)$ besitzt?

Dies wollen wir nun klären:

Ziel soll es nun sein, die Substitutionsregel von "rechts nach links" anzuwenden.

Dazu benötigen wir zwei Ideen:

1. Wir vertauschen x und u.
2. Setze $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$. Dann ist $a = \overline{g}(\alpha)$ und $b = \overline{g}(\beta)$. Um dies nachzuvollziehen, schauen wir uns zwei Beispiele an:

$\alpha = a^2 \mid \sqrt{\ldots}$

$a = \sqrt{\alpha}$

oder $\alpha = 3^a \mid \lg$

$a = \log_3(\alpha)$

Wir erhalten das Ergebnis also durch die Anwendung der Umkehrfunktion.
Mit diesen zwei Ideen folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\bar{g}(\alpha)}^{\bar{g}(\beta)} f(g(u)) \cdot g'(u)\,dx$$

Klingt alles zunächst sehr abstrakt. Schauen wir uns also ein Beispiel an:
Berechne folgendes Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^4}\,dx$$

Substituiere: $u = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = (u-1)^{\frac{1}{2}} = g(u)$
Für die Umkehrfunktion $\bar{g}$ gilt: $u = \bar{g}(x) = x^2 + 1$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^4}\,dx = \int_{\bar{g}(0)}^{\bar{g}(1)} \frac{\sqrt{u-1}^{\,3}}{u^4} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{u-1})}\,du$$

$$= \int_{\bar{g}(0)}^{\bar{g}(1)} \frac{(u-1)\cdot\sqrt{u-1}}{u^4} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{u-1})}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\bar{g}(0)}^{\bar{g}(1)} \frac{(u-1)}{u^4}\,du = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 u^{-3} - u^{-4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot u^{-2} + \frac{1}{3} \cdot u^{-3}\right]_1^2 = \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Bei diesem Schritt $\frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot u^{-2} + \frac{1}{3} \cdot u^{-3}\right]_1^2$ liefert eine Rücksubstitution eine Stammfunktion von $f(x)$.

Substitutionsverfahren:

Eine Funktion $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ hat als Stammfunktion $H(x) = F(g(x))$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Damit ergibt sich:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, dx$$

Ist g auf dem Intervall $[a; b]$ umkehrbar, so ergibt sich nach Vertauschung der Variablen x und u mit $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\bar{g}(\alpha)}^{\bar{g}(\beta)} f(g(u)) \cdot g'(u)\, dx$$

Diese Gleichung heißt Substitutionsformel.

Die Substitution von $x = g(u)$ mit einer geeigneten Funktion g ermöglicht oft eine Berechnung von Integralen, bei denen eine Stammfunktion nicht unmittelbar erkennbar ist.

3 Integration gebrochenrationaler Funktionen mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

Berechne folgendes Integral: $\int_2^3 \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

Vorüberlegung: Wir formen den Funktionsterm erst einmal um, um nachher einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können. Ziel muss es sein, zwei Brüche zu erhalten, die im Zähler eine Konstante und im Nenner eine Funktion ersten Grades enthält, denn davon können wir sehr einfach eine Stammfunktion angeben. Denn die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $F(x) = \ln(x)$.

Formen wir den Integranden also um:

$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ Nun müssen A und B berechnet werden.

Wir führen zunächst die Brüche wieder zusammen, bilden also den Hauptnenner $(x-1)(x+2)$:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

Nun gilt mit dem Koeffizientenvergleich:

$A + B = 1$ und $2A - B = 1$. Wir stellen nun also ein geeignetes LGS auf und erhalten:

$3A = 2 \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$ und folglich $B = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Damit gilt:

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}.$$

Eine Stammfunktion kann sofort angegeben werden:

$$F(x) = \frac{2}{3}\cdot\ln(|x-1|) + \frac{1}{3}\cdot\ln(|x+2|).$$

$$\int_2^3 \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot\ln(|x-1|) + \frac{1}{3}\cdot\ln(|x+2|)\right]_2^3 = \frac{1}{3}\cdot\ln 5\ .$$

Weitere Beispiele:

1.) Gib eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$ an.

Wie der Name des Verfahrens schon verrät, kann dieses nur auf echt gebrochenrationale Funktionen direkt angewendet werden.
Führe also zunächst eine Polynomdivision durch, um einen ganzrationalen Anteil und einen echt gebrochenrationalen Anteil zu erhalten:

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x^2 - 1}\ .$$

Nun gehe ich analog zu oben vor:

Bestimme also eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{Ax + A + Bx - B}{(x - 1)(x + 1)}$$
$$= \frac{x(A + B) + A - B}{(x - 1)(x + 1)}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $A + B = 0$ und $A - B = 1$. Löse das entsprechende LGS und erhalte:

$2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$ und folglich $B = -\frac{1}{2}$. Damit gilt:

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot \ln(x - 1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x + 1).$$

2.) Gib eine Stammfunktion zu der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ an.

$f(x) = \frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x \cdot (x^2 + 1)}$ Der Nenner besitzt eine nicht reelle Nullstelle.

Ansatz:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x \cdot (x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x \cdot (x^2 + 1)}$$

$$= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x \cdot (x^2 + 1)} = \frac{x^2(A + B) + Cx + A}{x \cdot (x^2 + 1)}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$A = 1$, $C = 0$ und folglich $B = -1$ und somit :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\ ;\ F(x) = \ln(|x|) - \frac{1}{2} \cdot \ln(\left|1 + x^2\right|).$$

3.) Gib eine Stammfunktion zu der Funktion $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ an.

$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} = f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x - 1)^2}$ Der Nenner besitzt eine doppelte Nullstelle.

Ansatz:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x - 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} = \frac{A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx}{x(x - 1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x - 1)^2} = \frac{x^2(A + B) + x(-2A - B + C) + A}{x(x - 1)^2}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$A = 1$ und damit ergibt sich folgendes LGS:

I. $1 + B = 2 \Leftrightarrow B = 1$ und folglich II. $-2 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 3$

Damit erhalten wir folgende Funktion und Stammfunktion:

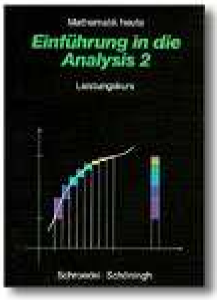
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2}\ ;\ F(x) = \ln(|x|) + \ln(|x - 1|) - \frac{3}{x - 1}$$

4 Literatur und weiterführende Links

- **Integralsammlung**
- **Doppelintegrale**
- **Ein paar Integrale ...**

Ana[rchie] V: Neues vom Integrationsbeauftragten

Ich habe mich sehr an mein wunderschönes, ausführliches und verständliches Schulbuch gehalten, das hier:



5 Abschluss

Nun seid ihr also in der Lage von Funktionen fast jeder Art eine Stammfunktion angeben zu können. Und das reicht für den Schulgebrauch auch erst einmal aus.
Ich hoffe euch hat dieser Artikel gefallen und freut euch schon auf den nächsten.
Mit diesem Artikel wollte ich nur die drei Verfahren zur Bestimmung von Stammfunktionen, die man in der Schule lernt, aufzeigen und herleiten. Für Beispiele, wie man Integrale mit diesen Verfahren berechnet, schaut doch bitte in den oben aufgeführten Links.

Ich danke meinem Testleser hugoles, der fleißig Korrektur gelesen hat.

Teil 1: Einstieg in die Integralrechnung
Teil 2: Stammfunktionen & Co.
Teil 3: Rotationskörper
Teil 4: Uneigentliche Integrale
Teil 5: Wie findet man eine Stammfunktion?

Euer
Florian Modler