# Die komplexen Zahlen

Eine erste Einführung für Schüler und Schülerinnen

Die Herkunft der Komplexen Zahlen lässt sich wie folgt beschreiben:
Die anfänglichen Probleme der Mathematik bestanden darin, dass man einfache Rechenoperationen für manche Probleme nicht anwenden konnte.
Die zuerst definierten natürlichen Zahlen reichten irgendwann nicht mehr aus, um alle Probleme der Mathematik zu erfassen. Zum Beispiel bei der einfachen Rechnung 5 geteilt durch 2 erhält man das Ergebnis 2,5 , welches nicht im Bereich der natürlichen Zahlen liegt. Hierzu haben die Mathematiker die rationalen Zahlen eingeführt, welche auch Brüche beinhalten. Jedoch ging der Weg nicht direkt von den natürlichen Zahlen zu den komplexen Zahlen, sondern wurde die Unvollständigkeit der natürlichen Zahlen durch die ganzen Zahlen , die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen erweitert...

## 5.1.1 Voraussetzungen

Bevor wir richtig los legen können, müssen wir ein paar Zahlenmengen voraussetzen. Diese sollten euch alle aus der Schule bekannt sein.
Die Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) kennt jeder. Es sind Zahlen wie 1, 2, 3…
Auch die Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) sollten kein Problem darstellen. Es sind auch die „negativen natürlichen Zahlen“ damit gemeint. Also -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …
Die Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) umfasst alle Zahlen, die sich als Brüche $\frac{m}{n}$ (wobei $m, n \in \mathbb{Z}$) darstellen lassen. Dies sind: Die ganzen Zahlen, die endlichen Dezimalbrüche und die unendlichen periodischen Dezimalbrüche.
Die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) besteht aus den rationalen und den irrationalen Zahlen.

Die Menge der irrationalen Zahlen umfasst alle unendlichen nicht periodischen Dezimalbrüche. Zu den irrationalen Zahlen gehören so z. B. die Wurzeln aus positiven Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, die Eulersche Zahl e, die Kreiszahl π, und viele Weitere.
Man kann die Menge der Zahlen also wie folgt zusammenfassen:

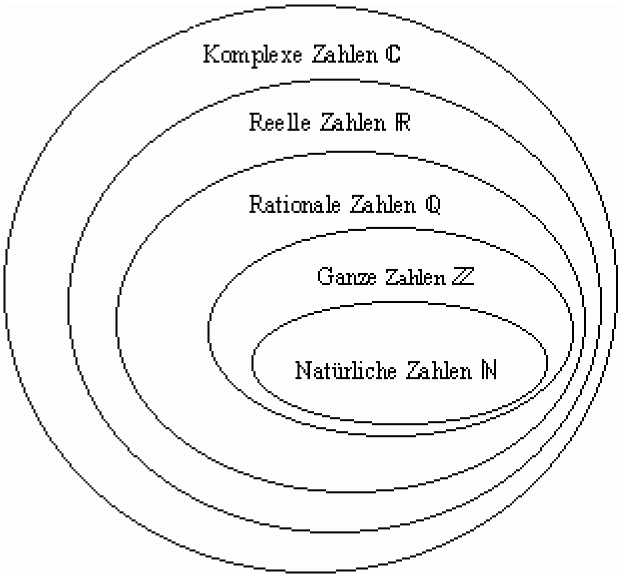

**Abb. 5.1.1.1**

## 5.1.2 Einführung

Nun haben wir die Voraussetzungen gelegt und können nun endlich den Begriff der komplexen Zahlen einführen. Viele von euch haben bestimmt schon einmal eine quadratische Gleichung wie diese $x^2+4x+8=0$ gelöst und vom Lehrer gesagt bekommen, dass die Gleichung in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert ist. Als Lösung würde man nämlich $x_1=-2+\sqrt{-4}$ und $x_2=-2-\sqrt{-4}$ erhalten.

Ein weiteres <u>Beispiel:</u>
Von einem rechteckigen Grundstück heißt es, dass seine Fläche 38050 m² beträgt und sein Umfang 780 m. Kann das stimmen?

Bezeichnen x und y die Maßzahlen der Grundstückseiten, dann gilt:

I. xy = 38050 (Flächeninhalt)

II. 2 (x + y) = 780 (Umfang)

-----------

Forme II. nach y um: y = 390 − x Dies wird in I. eingesetzt, um x zu berechnen.

$(390 - x)x = 38050$

$x^2 - 390x + 38050 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{390 \pm \sqrt{-100}}{2}$.

$\sqrt{-100}$ läßt sich nicht berechnen; mindestens eine der obigen Angaben über die Größe des Grundstücks ist daher falsch.

Daher lag es nahe, irgendwie Wurzeln aus negativen Zahlen berechnen zu können. Und dies leisten die komplexen Zahlen.
Wenn wir also eine Möglichkeit suchen, Gleichungen der Art $x^2=-1$ (*) zu lösen, tun wir das, was bereits der deutsche Mathematiker Leonhard Euler getan hat, wir führen ein Symbol für die Lösung ein, dessen tiefere Bedeutung noch gar nicht klar ist.

Wir definieren: $i^2 = -1$.
i steht für die Abkürzung „imaginäre Einheit“.


Mit dieser Definition können wir die Gleichung (*) ohne Probleme lösen. $x_{1,2} = \pm i$ sind die Lösungen. Fügt man die Zahl i den reellen Zahlen zu, dann entsteht beim Rechnen eine ganze Menge neuer Zahlen, z.B. $3i; 2i+1; 1-i; 7i$. Allgemein erhalten wir also Zahlen der Form $a+bi$. a und b sind reelle Zahlen. Solche Zahlen nennen wir nun komplexe Zahlen.
Wir definieren nochmal ganz genau die komplexen Zahlen:

**Definition:**
**Eine Zahl der Form $z = a+bi \ (a,b \in \mathbb{R})$ nennt man eine komplexe Zahl. a ist der Realteil und b der Imaginärteil. Eine Zahl, deren Imaginärteil ein anderes Vorzeichen besitzt, heißt konjungiert komplexe Zahl.**

Sonderfälle:
Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a+bi$ und $z_2 = c+di$ sind gleich, wenn a=c und b=d. Wenn also der Realteil und imaginäre Teil übereinstimmen.
Kommen wir nochmal zu den konjungiert komplexen Zahlen:
Dabei gilt: $\overline{z} = \overline{a+bi} := a-bi$. Somit erhalten wir weiter:
$z \bullet \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$, da $i^2 = -1$.
Der Pfeil der konjugiert komplexen Zahl liegt spiegelsymmetrisch zum Pfeil von z bezüglich der positiven reellen Achse.

Wenn man sich, wie Vektoren, auch die komplexen Zahlen als Pfeile dargestellt vorstellt (siehe dazu Abbildung 5.1.2.1 oder die folgende), so liegt der Pfeil der konjugiert komplexen Zahl spiegelsymmetrisch zum Pfeil von z bezüglich der positiven reellen Achse.

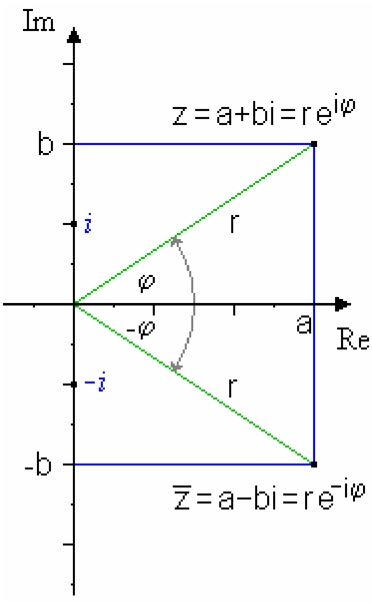


**Abb. 5.1.2.1**

## 5.1.3 Wie rechnet man mit komplexen Zahlen?

Mit komplexen Zahlen rechnet man so wie mit reellen Zahlen.
Somit gilt für die Addition:

$$(1+2i)+(3+4i)=1+2i+3+4i=(1+3)+(2i+4i)=4+6i$$

$$(2+7i)+(3+9i)=2+7i+3+9i=(2+3)+(7i+9i)=5+(7+9)i=5+16i$$

Für die Subtraktion erhalten wir entsprechend:

$$(1+2i)-(3+4i)=(1-3)+2i-4i=-2-2i$$

$$(3+9i)-(2+7i)=(3-2)+9i-7i=1+2i$$

Natürlich kann man komplexe Zahlen auch mit einander multiplizieren. Dabei muss man nur beachten, dass $i^2=-1$ ist.

$$(1+2i)\bullet(3+4i)=3+4i+6i+8i^2=3+10i+8i^2=3+10i+8\bullet(-1)$$
$$=3-8+10i=-5+10i$$
$$(3+9i)\bullet(2+7i)=6+21i+18i+63i^2=6+39i+63\bullet(-1)=6-63+39i$$
$$=-57+39i$$

Allgemein können wir also festhalten:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(bi+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(bi-di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$(a+bi)\bullet(c+di)=ac+adi+cbi+bdi^2=ac+(ad+cb)i+bd\bullet(-1)=(ac-bd)+(ad+cb)i$$

Auch das Potenzieren der imaginären Einheit ist eine Art, sich den komplexen Zahlen weiter zu nähern:

Da $i^2 = -1$ folgt ersichtlich:

$i^3 = i^2 \bullet i = -1 \bullet i = -i$

$i^4 = i^2 \bullet i^2 = -1 \bullet (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \bullet i = 1 \bullet i = i$

$i^6 = i^5 \bullet i = i \bullet i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \bullet i = -1 \bullet i = -i$

usw.

Dementsprechend kann natürlich auch mit Vielfachen der imaginären Einheit gerechnet werden.

$(3i)^2 = 3^2 i^2 = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$

$(4i^2)^2 = 16 \bullet i^4 = 16 \bullet 1 = 16$

Auch das Dividieren durch Potenzen ist möglich:

$$\frac{4}{i} = \frac{4 \bullet i}{i \bullet i} = \frac{4i}{i^2} = \frac{4i}{-1} = -4i$$

$$\frac{12}{i^3} = \frac{12 \bullet i}{i^3 \bullet i} = \frac{12i}{i^4} = 12i$$

Auch die Wurzelrechnung ergibt sich damit sehr leicht:

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \bullet \sqrt{-1} = 4i$ (Denn $i^2 = -1$ und damit $i = \sqrt{-1}$)

Kommen wir nun aber auch zur Division von komplexen Zahlen:

Dazu berechnen wir: $\frac{3-2i}{4+5i}$.

Wir erweitern geschickt, sodass im Nenner die dritte binomische Formel angewendet werden kann.

$$\frac{(3-2i) \bullet (4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{12-15i-8i+10i^2}{16-25i^2} = \frac{12-10-23i}{16+25} = \frac{2-23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i.$$

Behandeln wir noch ein einfaches Beispiel:

$$\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{(2 \bullet 4 + 3 \bullet 5) + (3 \bullet 4 - 2 \bullet 5)i}{16+25} = \frac{23+2i}{41}$$

Wir fassen die Division von komplexen Zahlen noch einmal allgemein zusammen:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Man kann auch mit konjugiert komplexen Zahlen rechnen:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = a+c-bi-di$$

$$= (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Analog erhält man:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$

$\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$

Der Betrag $|z|$ von der komplexen Zahl $z$ wird definiert als:

$$|z| = \sqrt{z \bullet \overline{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

# 5.1.4 Lösungen von quadratischen Gleichungen

Wir wollen nun die Ausgangsgleichung (also die quadratische Gleichung, deren Lösung in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert ist) nun lösen und die komplexen Zahlen streng mathematisch definieren.
Was ist also genau die Lösung von $x^2+4x+8=0$? Nach dem Anwenden der p, q-Formel erhalten wir: $x_1=-2+\sqrt{-4}$ und $x_2=-2-\sqrt{-4}$. Mit Hilfe der komplexen Zahlen sind wir nun aber in der Lage die Lösungen exakt anzugeben:

$$x_1=-2+\sqrt{-4}=-2+\sqrt{4\bullet(-1)}=-2+\sqrt{4}\bullet\sqrt{-1}=-2+2\bullet i$$

Die zweite Lösung lautet:

$$x_2=-2-\sqrt{-4}=-2-\sqrt{4\bullet(-1)}=-2-\sqrt{4}\bullet\sqrt{-1}=-2-2\bullet i$$

Allgemein geschrieben erhalten wir für quadratische Gleichungen wie

$0=x^2+px+q$ Lösungen nach Anwenden der p, q-Formel: $x_{1,2}=-\frac{p}{2}+-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ .

Für $\frac{p^2}{4}-q\geq 0$ ergeben sich eine bzw. zwei reelle Lösungen.

Für $\frac{p^2}{4}-q<0$ schreibt man die Lösung in der Form $x_{1,2}=-\frac{p}{2}+-i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

# 5.1.5 Darstellung komplexer Zahlen in der Zahlenebene

Den imaginären Zahlen ist gemeinsam, dass ihr Quadrat negativ ist; keine reelle Zahl hat diese Eigenschaft. Deshalb passen die imaginären Zahlen nirgends auf die reelle Zahlengerade. So wurde von den Mathematikern eine zweite, imaginäre Zahlengerade eingeführt, die durch den Punkt für die Zahl 0 auf der reellen Achse geht und senkrecht auf dieser steht. Den ganzen Zahlen auf der reellen Achse entsprechen die Zahlen ...,-3i,-2i,-1i,0i,i,2i,3i,... auf der imaginären.
Wie stellt man jetzt also ganz genau komplexe Zahlen graphisch dar?
Weil jede komplexe Zahl aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, dem Realteil und dem
Imaginärteil, kann man jede komplexe Zahl als Punkt in einer Ebene mit einem Koordinatensystem darstellen. Man nennt sie die Gaußsche Zahlenebene oder auch die Ebene der komplexen Zahlen.
Als x-Koordinate verwendet man den Realteil: x = Re(z), als y-Koordinate den Imaginärteil: y = Im(z).

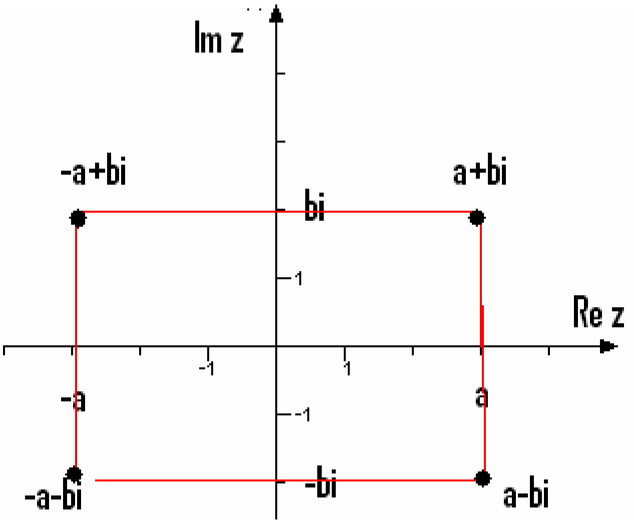

**Abb. 5.1.5.1** Darstellung von komplexen Zahlen

Nun stellen wir nochmals die Rechenarten komplexer Zahlen graphisch dar. Wenn wir zwei komplexe Zahlen addieren, bedeutet dies graphisch folgendes:

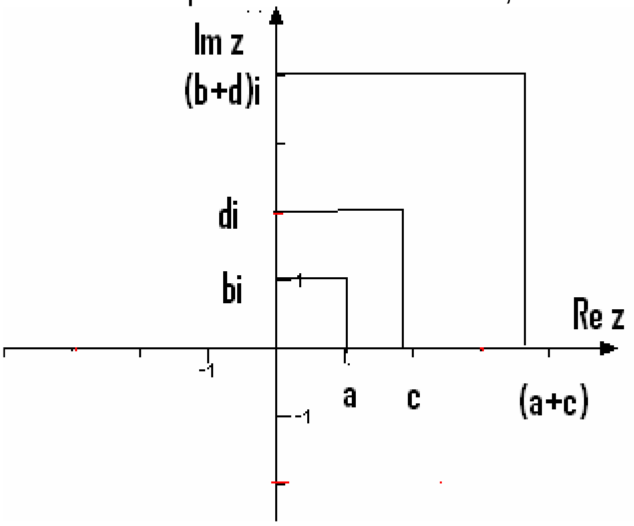

**Abb. 5.1.5.2** Graphisches Addieren zweier komplexer Zahlen

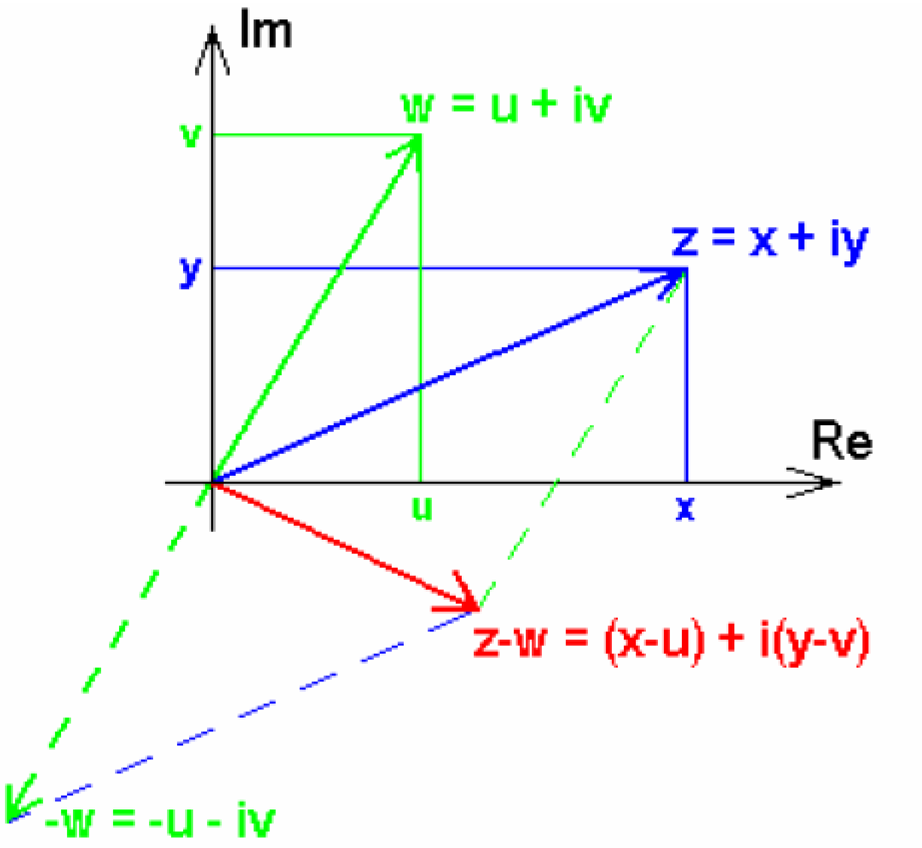

**Abb. 5.1.5.3** Graphisches Subtrahieren zweier komplexer Zahlen (Abbildung von www.thphys.uni-heidelberg.de)

Nun wollen wir eine weitere Schreibweise komplexer Zahlen kennenlernen und zwar mit Hilfe von Polarkoordinaten.

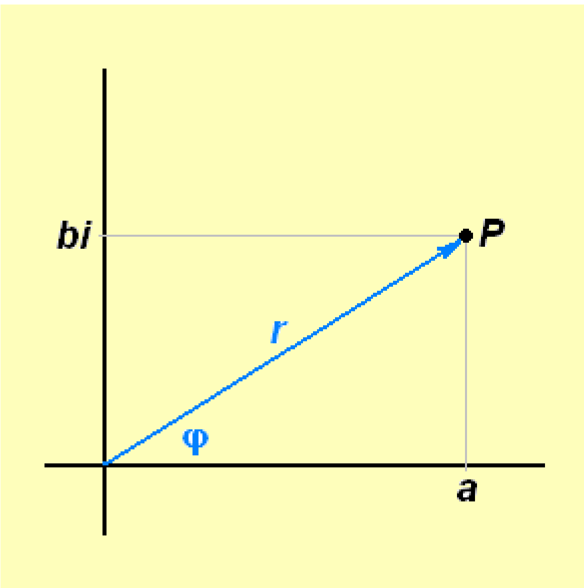

**Abb. 5.1.5.4** Die Gaußsche Zahlenebene

Aus der Abbildung 5 ist mit elementarer Schulgeometrie sofort erkennbar, dass gilt:

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgt: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Der Tangens sagt: $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$

Sinus und Kosinus liefern: $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}\Leftrightarrow b=r\sin\varphi$ und $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\Leftrightarrow a=r\cos\varphi$

Wir können die komplexe Zahl $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ umschreiben und zwar indem wir a und b, wie wir sie eben mit Hilfe von Sinus und Kosinus berechnet haben, einsetzen: $z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Somit können wir die Rechnungen von komplexen Zahlen auch mit diesen so genannten Polarkoordinaten durchführen.

Allgemein gilt ja:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(bi+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(bi-di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$(a+bi)\bullet(c+di)=(ac-bd)+(ad+cb)i$$

Wir schreiben das Produkt der komplexen Zahlen in die Polarkoordinaten um.

Mit

$$ac-bd=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$ac+bd=r_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)=r_1r_2(\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

folgt:

$$(a+bi)\bullet(c+di)=(ac-bd)+(ad+cb)i=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2))+r_1r_2(\sin(\varphi_1+\varphi_2))\bullet i$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\bullet(\sin(\varphi_1+\varphi_2)))$$

Geometrische Multiplikation komplexer Zahlen:

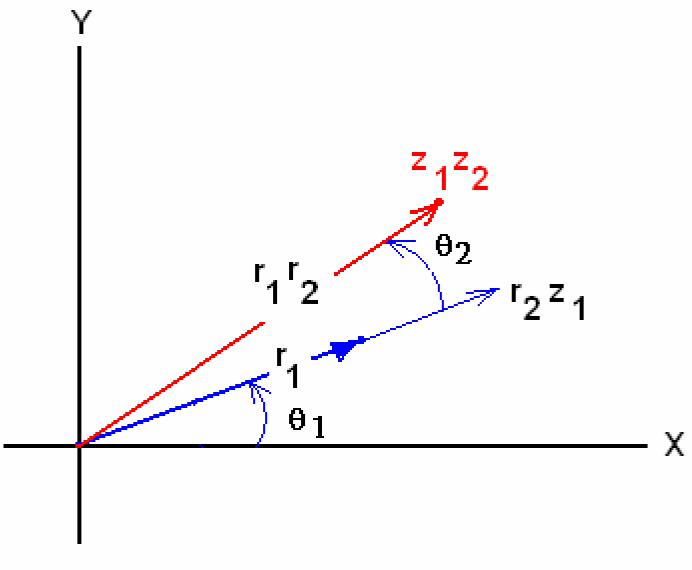


**Abb. 5.1.5.5** Geometrische Multiplikation komplexer Zahlen

Im Allgemeinen bedeutet das Produkt zweier komplexer Zahlen geometrisch betrachtet eine Drehung um einen Winkel und eine Streckung.

Geometrische Division komplexer Zahlen:

Zuerst dividieren wir zwei komplexe Zahlen (mit Polarkoordinaten) allgemein:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_2(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)\bullet(\cos\psi + i\sin\psi)}{(\cos\psi + i\sin\psi)\bullet(\cos\psi + i\sin\psi)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi}$$ Mit $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$ folgt:

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi)$$ Anwenden der Additionstheoreme:

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)) \quad (2)$$

Geometrisch bedeutet die Division komplexer Zahlen eine Dreh-Streckung. Also eine Drehung in eine Richtung und eine Stauchung.

Anmerkung: Desweiteren gilt die berühmte Eulersche Relation

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$,

mit deren Hilfe sich auch schreiben läßt:

$z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. (siehe auch die dritte Ergänzung)

Euler erkannte einen Zusammenhang zwischen der e - Funktion, die u. a. bei der stetigen Verzinsung, beim Wachstum von Bakterienkulturen, beim radioaktiven Zerfall eine Rolle spielt, und den beiden trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus.

Alle drei lassen sich für beliebiges Argument nur näherungsweise berechnen; dazu verwendet man die drei folgenden unendlichen Reihen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$$

Mit ihnen erhält man, wenn x durch ix ersetzt wird:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + i^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + i^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots.$$

$$+ i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots\right)$$

$= \cos x + i\,\sin x$, wie oben angegeben.

Ein weiterer Beweis der Eulerschen Relation kann mit Hilfe von Reihen erfolgt.

Alle Schüler, die sich in diesem Gebiet ein wenig auskennen, können den folgenden Beweis verstehen.

Schüler, die noch keine Erfahrung damit haben, überlesen diesen kommenden teil bitte.

Es gilt: $e^{(ix)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot x^n}{n!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{(2k)} \cdot (x)^{(2k)}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k+1} \cdot (x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(x)^{(2k)}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

Eine weitere Anmerkung: Aus der Eulerschen Relation lassen sich
auch sehr leicht einige trigonometrische Additions -
theoreme herleiten, wie folgendes Beispiel zeigt:

$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$

$= (\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i \sin\beta)$

$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$+ i \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.)$

Wegen

$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)$

folgt durch Vergleich:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

und noch für $\alpha = \beta$:

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

Noch eine dritte Ergänzung zu $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$:

Der Wert von $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ für ein gegebenes Verhältnis $\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ ist nicht eindeutig, sondern nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi$ (oder im Gradmaß: von 180°) bestimmt.

Wir betrachten dazu das Beispiel $z = -1 + i$:

Dort ist $x = -1$, $y = 1$, und wenn man mit $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ weiterrechnet (wie es der Taschenrechner anzeigt), ist das falsch. Dies zeigt sich an der Zeigerdarstellung von $z = -1 + i$.

Richtig ist in diesem Fall $\varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi$ oder im Gradmaß $\varphi = -45° + 180° = 135°$. [$\varphi$ wird von der reellen Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen.]

## 5.1.6 Die Moivre - Formel

Potenzieren:
Die Moivre-Formel gibt an, wie man die n-te Potenz einer komplexen Zahl berechnen kann.

Eine weitere Herleitung der Moivreschen Formel sei die folgende:

Aus $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ folgt

$(e^{i\varphi})^n = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n$

$e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$.

Das ergibt dann sofort die Moivresche Formel

$\cos(\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$.

Allgemein erhalten wir somit die Formel von Moivre:

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

Radizieren:
Wir definieren $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i \bullet \sin\psi)$.

$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i \bullet \sin\psi) \quad |(...)^n \qquad (3)$

$z = \rho^n (\cos\psi + i \bullet \sin\psi)^n$ Aus der Formel von Moivre folgt nun:

$z = \rho^n (\cos n\psi + i \bullet \sin n\psi)$ (4)

Die allgemeine Form der komplexen Zahl in Polarform lautet: $z = r(\cos\varphi + i \bullet \sin\varphi)$ (5)

Vergleicht man (4) mit (5) sieht man:

$r = \rho^n \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ und $\varphi = n\psi \Leftrightarrow \psi = \frac{\varphi}{n}$ Dies setzen wir in (3) ein:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i \bullet \sin\frac{\varphi}{n})$.

## 5.1.7 Anwendungen von komplexen Zahlen

Ich werde in diesem Abschnitt ganz kurz auf Anwendungen von den komplexen Zahlen in der Technik eingehen, um deren Bedeutung hervorzuheben.
Was man damals noch nicht ahnen konnte und sich vornehmlich erst im vergangenen zwanzigsten Jahrhundert herausstellte: die imaginären Zahlen spielen eine sehr nützliche Rolle in der Wechselstromtechnik. Bei ihr wird traditionell die Stromstärke mit i bezeichnet, so dass man dort für die imaginäre Einheit gern den Buchstaben j verwendet.
Sehr fruchtbar sind komplexen Zahlen auf einem Gebiet, wo man es kaum erwartet: in der Elektrizitätslehre, genauer: beim Wechselstrom, vor allem in der Radiotechnik. Wie es dazu kommt, kann ich hier in Kürze nicht erklären. Nur soviel: Man rechnet dort mit sogenannten Blind- und Scheinwiderständen. Blindwiderstände - davon gibt es zwei Arten: den induktiven und den kapazitiven - sind rein imaginär, Scheinwiderstände dagegen komplex, wobei der reelle Anteil von Ohmschen Widerständen gebildet wird, die man auch Wirkwiderstände nennt.

Weitere Informationen bietet z.B. wikipedia.de:
http://de.wikipedia.org/wiki/Blindwiderstand
Wer weitere Anwendungsmöglichkeiten kennt, der möge dies doch in seinem Kommentar mit anfügen.

## 5.1.8 Literatur und weiterführende Links

Im Folgenden sei nun die Literatur angeführt, die ich verwendet habe. Weiterhin sind eine Menge guter Links aufgeführt, die einen weiteren Blick in den Bereich der komplexen Zahlen geben.


http://www.mathe-cd.de/5_Komplex/50000%20KOMPLEXE%20ZAHLEN%20DEMO.pdf
http://www.komplexe-zahlen.de/
http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/zeichnen.htm
http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/polar.htm
http://de.wikibooks.org/wiki/Komplexe_Zahlen
http://de.wikibooks.org/wiki/Imagin%C3%A4re_und_komplexe_Zahlen

http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/komplex.htm
http://www.thg.aa.bw.schule.de/Notizbuch/komplex/startseite.htm
http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/komplex.htm
http://www.mathematik.de/mde/presse/fuenfminuten/beitraege/93_280205_komplex.html
http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/HM/HMD/aufgaben00/node266.html

### 5.1.9 Abschluss

Wie anfangs schon angeführt, entstand dieser Artikel aufgrund der Neugier meines Nachhilfeschülers über die komplexen Zahlen. Einen herzlichen Dank dafür. Ich hoffe, ich konnte einen ersten kleinen, dafür aber sehr interessanten, Überblick über die komplexen Zahlen geben. Wie man sie definiert, wie man mit ihnen rechnet und wie man sie geometrisch darstellt. Das Highlight sollte natürlich die Weltformel von Euler sein.

*Florian Modler*