Die Ableitungsregeln

Von Florian Modler

In diesem Artikel werden die Ableitungsregeln (Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel) hergeleitet und an einigen Beispielen erläutert.

<u>1. Die Faktorregel</u>

Leite die Funktion $f(x) = 3x^2$ *nach der Faktorregel ab.*

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = 3x^2$$
$$f'(x) = 6x$$

<u>Herleitung / „Beweis“:</u>

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)^2 - kx^2}{h} = \lim_{h\to 0} k \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} k \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} k \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} k(2x+h) = k \bullet \lim_{h\to 0}(2x+h)$$
$$= k \bullet 2x$$

Faktorregel:

Wenn die Funktion u an der Stelle a differenzierbar ist, dann ist auch die Funktion f mit $f(x) = k \bullet u(x)$ an der Stelle a differenzierbar, das heißt es existiert eine Ableitung, und es gilt:
$f'(x) = k \bullet u'(x)$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Kurz: $(k \bullet u)' = k \bullet u'$

2. Die Summenregel

Leite die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ *an der Stelle a ab bzw. gib die Ableitungsfunktion an.*

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Herleitung / „Beweis":

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} + \sqrt{x} - (\frac{1}{a} + \sqrt{a})}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}) + (\sqrt{x} - \sqrt{a})}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\to f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Summenregel:

Die Funktionen u und v seien in einem gemeinsamen Intervall definiert, das die Stelle a enthält. An dieser Stelle seien sie differenzierbar. Dann ist auch die Funktion f mit $f(x) = u(x) + v(x)$ an der Stelle a differenzierbar, das heißt die Ableitungsfunktion existiert und es gilt:

$f'(a) = u'(a) + v'(a)$

Eine Summe wird gliedweise differenziert.

Kurz: $(u+v)' = u' + v'$

3. Die Produktregel:

Behauptung: $u(x) \bullet v(x)$, dann ist $f'(x) = u'(x) \bullet v(x) + u(x) \bullet v'(x)$.

Beweis:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{u(x) \bullet v(x) - u(a) \bullet v(a)}{x - a}$$

Nun addieren wir 0, das heißt wir addieren und subtrahieren gleichzeitig einen gleichen Term und zwar $-u(a) \bullet v(x) + u(a) \bullet v(x)$:

$$= \lim_{x \to a} \frac{u(x) \bullet v(x) - u(a) \bullet v(x) + u(a) \bullet v(x) - u(a) \bullet v(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \bullet v(x) + \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \bullet u(a) \right)$$

Im nächsten Schritt wenden wir die Grenzwertgesetze an:

$$= \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \bullet \lim_{x \to a} v(x) + \lim_{x \to a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \bullet u(a)$$

$$= u'(a) \bullet v(a) + v'(a) \bullet u(a)$$

q.e.d

Produktregel:

Wenn die Funktionen u und v an der Stelle a differenzierbar sind, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = u(x) \bullet v(x)$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) \bullet v(x) + u(x) \bullet v'(x)$$

4. Die Quotientenregel:

Behauptung:

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, dann ist $f'(x)=\frac{u'(x)\bullet v(x)-u(x)\bullet v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Beweis:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(a)}{v(a)}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{u(x)\bullet v(a)-u(a)\bullet v(x)}{v(x)\bullet v(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{u(x)\bullet v(a)-u(a)\bullet v(x)}{v(x)\bullet v(a)\bullet(x-a)}$$

Auch hier addiert man wieder 0, indem wir folgenden Term gleichzeitig addieren und subtrahieren $-v(a)\bullet u(a)+v(a)\bullet u(a)$:

$$=\lim_{x\to a}\frac{u(x)\bullet v(a)-v(a)\bullet u(a)+v(a)\bullet u(a)-u(a)\bullet v(x)}{v(x)\bullet v(a)\bullet(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}[\frac{u(x)-u(a)}{(x-a)\bullet v(x)\bullet v(a)}\bullet v(a)+\frac{v(a)-v(x)}{(x-a)\bullet v(x)\bullet v(a)}\bullet u(a)]$$

Jetzt wendet man auch hier wieder die Grenzwertgesetze an:

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{u(x)-u(a)}{x-a}}{v(x)\bullet v(a)}\bullet v(a)+\lim_{x\to a}\frac{\frac{v(a)-v(x)}{x-a}}{v(x)\bullet v(a)}\bullet u(a)$$
$$=\frac{u'(a)}{v(a)\bullet v(a)}\bullet v(a)-\frac{v'(a)}{v(a)\bullet v(a)}\bullet u(a)$$
$$=\frac{u'(a)\bullet v(a)-v'(a)\bullet u(a)}{[v(a)]^2}$$

q.e.d

Quotientenregel:

Wenn die Funktionen u und v an der Stelle a differenzierbar sind, dann ist auch die Funktion $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt:

$f'(x)=\frac{u'(x)\bullet v(x)-u(x)\bullet v'(x)}{[v(x)]^2}$.

5. Die Kettenregel:

Behauptung: $f(x) = g[\ell(x)]$, dann ist $f'(x) = g'[\ell(x)] \bullet \ell'(x)$.

Beweis:

Es gilt: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g[\ell(x+h)] - g[\ell(x)]}{h}$$

Nun erweitern wir dies mit $\frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{\ell(x+h) - \ell(x)}$. Dazu muss gesagt werden: $\ell(x+h) - \ell(x) \neq 0$.
Sonst würden wir durch 0 dividieren. Und hier ist eine kleine Lücke in dem Beweis. Der Vorteil dieses Beweis ist aber, dass er sehr einfach ist, wie ihr gleich sehen werdet:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g[\ell(x+h)] - g[\ell(x)]}{h} \bullet \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{\ell(x+h) - \ell(x)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g[\ell(x+h)] - g[\ell(x)]}{\ell(x+h) - \ell(x)} \bullet \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g[\ell(x+h)] - g[\ell(x)]}{\ell(x+h) - \ell(x)} \bullet \lim_{h \to 0} \frac{\ell(x+h) - \ell(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g[\ell(x+h)] - g[\ell(x)]}{\ell(x+h) - \ell(x)} \bullet \ell'(x)$$

Da der erste Term zu unübersichtlich ist, wird substituiert.
$k = \ell(x+h) - \ell(x); z = \ell(x)$, dann ist $z + k = \ell(x+h)$.
Außerdem ist $\lim\limits_{h \to 0} \ell(x+h) - \ell(x) = 0 = \lim\limits_{h \to 0} k$.

$$= \lim_{k \to 0} \frac{g(z+k) - g(z)}{k} \bullet \ell'(x)$$
$$= g'(z) \bullet \ell'(x)$$

Rücksubstitution f(x)=z:

$$= g'[\ell(x)] \bullet \ell'(x)$$

q.e.d

Florian Modler