Aufgaben zur vollständigen Induktion

Wenn nichts anderes angegeben ist, dann gelten die Behauptungen für $n \in \mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$.

A) **Teilbarkeit:**

1) $n^2 + n$ ist gerade (d.h. durch 2 teilbar).

2) $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.

3) $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

4) $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

5) $2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar.

6) $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar.

7) $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

8) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar.

9) $7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar.

10) $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

11) $5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar.

12) $2^{3n} + 13$ ist durch 7 teilbar.

13) $1 < a \in \mathbb{N}$: $a^n - 1$ ist durch $a - 1$ teilbar.

14) $n^7 - n$ ist durch 7 teilbar.

15) $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ ist durch 5 teilbar.

16) $3n^5 + 5n^3 + 7n$ ist durch 15 teilbar.

17) $3^{2n} + 7$ ist durch 8 teilbar.

18) $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

19) $n^4 - 4n^2$ ist durch 3 teilbar.

20) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ ist durch 9 teilbar.

21) $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

22) $5^{2n} + 24n - 1$ ist durch 48 teilbar.

23) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

24) $a \in \mathbb{N}$: $(2a-1)^n - 1$ ist gerade.

25) $a \in \mathbb{N}$: $a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}$ ist durch $a^2 + a + 1$ teilbar.

26) $a \in \mathbb{N}$: $a^{2n+1} - a$ ist durch 6 teilbar.

B) **Summenwerte:**

1) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

3) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ bzw.
$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+...+n)^2$

4) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(3n^2+3n-1)}{30}$

5) $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

6) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6}$

7) $1+4+7+\ldots+(3n-2) = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$

8) $3+7+11+\ldots+(4n-1) = 2n^2+n$

9) $1+2+4+8+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$

10) $1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-\ q^{n+1}}{1-\ q}$ bzw.
$a \ + \ a\cdot q \ + \ a\cdot q^2 \ +\ldots+ \ a\cdot q^{n-1} \ = \ a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

11) $1+\frac{2^0}{3^1}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{2(n-1)}}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

12) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ bzw.
$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2+(2n+1)^2 = (n+1)\cdot(2n+1)$ bzw.
$-1^2+2^2-3^2+4^2-\ldots+(2n)^2 = n\cdot(2n+1)$

13) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$

14) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n! = (n+1)!-1$ [es gilt: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$]

15) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$

16) $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

17) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 2\cdot(1-\frac{1}{2^n})$

18) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

19) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

20) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

21) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

22) $\frac{1}{(1+3)\cdot(1+4)}+\frac{1}{(2+3)\cdot(2+4)}+\ldots+\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)} = \frac{n}{4\cdot(n+4)}$

23) $\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{n\cdot(n+2)} = \frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)\cdot(n+2)}$

24) $\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)}$

25) $\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n+1)\cdot(2n-1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

26) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ $\quad$ [es gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ und $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$]

27) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

28) $1 \cdot \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + (n-1) \cdot \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = n \cdot \ln(n) - \ln(n!)$

29) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$

30) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + ... + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

31) $(a+b)^n = b^n + \binom{n}{1} \cdot b^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} \cdot b^{n-2} \cdot a^2 + ... + \binom{n}{n-1} \cdot b^1 \cdot a^{n-1} + a^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$
[binomischer Lehrsatz] für $a,\, b \in \mathbb{R}$; $n \geq 0$

32) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1) \cdot \binom{n}{k} = 2^{n-1} \cdot (n+2) - 1$

C) **Produktwerte:**

1) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = 2^{n\cdot(n+1)}$

2) $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{4}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ für $n \geq 2$

3) $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{2}{3}) \cdot (1 - \frac{3}{4}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n!}$ für $n \geq 2$

4) $(1 - \frac{1}{2^2}) \cdot (1 - \frac{1}{3^2}) \cdot (1 - \frac{1}{4^2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ für $n \geq 2$

5) $(1 + \frac{1}{2^1}) \cdot (1 + \frac{1}{2^2}) \cdot (1 + \frac{1}{2^4}) \cdot (1 + \frac{1}{2^8}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) = \frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n-1}}$

6) $(1 + \frac{1}{n+1}) \cdot (1 + \frac{1}{n+2}) \cdot (1 + \frac{1}{n+3}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n+n}) = 2 - \frac{1}{n+1}$

7) $(\frac{3}{1})^2 \cdot (\frac{4}{2})^2 \cdot (\frac{5}{3})^2 \cdot (\frac{6}{4})^2 \cdot \ldots \cdot (\frac{n+1}{n-1})^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

8) $(1 + \frac{2}{1}) \cdot (1 + \frac{2}{2}) \cdot (1 + \frac{2}{3}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{2}{n}) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1)$

D) **Ungleichungen:**

1) $n^2 - 2n - 1 > 0$ für $n \geq 3$

2) $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n+1)} + \ldots + \frac{1}{1+(2n-1)} + \frac{1}{1+(2n)} > \frac{13}{24}$

3) $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n+1)} + \ldots + \frac{1}{1+(3n-1)} + \frac{1}{1+(3n)} > 1$

4) $2^n > n + 1$ für $n \geq 2$

5) $2^n > n^2$ für $n \geq 5$

6) $2^n > n^3$ für $n \geq 10$

7) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n-1} < n$

8) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$

9) $2^{n-1} \cdot (a^n + b^n) > (a+b)^n$ für $n \geq 2$; $a \neq b$; $a + b > 0$

10) $n! > 2^n \quad$ für $n \geq 4$

11) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad$ für $n \geq 2$

12) $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + ... + n \cdot 2^{n-1} > (n+1) \cdot n^2 \quad$ für $n \geq 5$

13) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

14) $n \cdot \sqrt{n} \;>\; n + \sqrt{n} \quad$ für $n \geq 3$

15) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \leq n^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$

16) $1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \quad$ für $n \geq 2$

17) $(1+x)^n > 1 + n \cdot x \quad$ für $x > -1 \;;\; x \neq 0$

18) $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x \quad$ für $0 \leq x \leq 1$

E) **(Rekursive) Folgen:**

1) $a_1 = 2;\; a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$; dann gilt: $a_n = \frac{n+1}{n}$

2) $a_1 = 2;\; a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^n$; dann gilt: $a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

3) $a_1 = 2;\; a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (2 + \frac{1}{a_n})$; dann gilt: $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2$

4) $a_1 = \sqrt{2};\; a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; dann gilt: $a_n \leq 2$

5) Für die Glieder der Fibonacci-Folge $F_1 = 1;\; F_2 = 1;\; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ gilt:
a) $1 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2}$
b) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
c) $F_{m+n} = F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}$
d) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$
e) $F_{2n+3}^2 = F_n^2 \cdot F_{n+3}^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2$
f) $F_n^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$
g) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} \,-\, F_n^2 = (-1)^n$

F) **Ableitungen:**

1) Für $f(x) = e^{ax+b}$ gilt: $f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}$

2) Für $f(x) = (e^x - t)^2$ gilt: $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x$

3) Für $f(x) = -(x+2) \cdot e^{-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (x + 2 - n) \cdot e^{-x}$

4) Für $f(x) = x^2 \cdot e^x$ gilt: $f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big) \cdot e^x$

5) Für $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^n} \;+\; (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^n}$

6) Für $f_n(x) = x^{-n}$ gilt: $f_n'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$

7) Für $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$

8) Für $f(x) = \frac{x}{2-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{1}{(x-2)^{n+1}}$

9) Für $f(x) = \sinh(a \cdot x)$ gilt: $f^{(2n)}(x) = a^{2n} \cdot \sinh(a \cdot x) \qquad \left[\ \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ \right]$

10) Für $f(x) = \sin(a \cdot x)$ gilt: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)$

G) **Sonstiges:**

1) Zeige: n Elemente kann man auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ verschiedene Arten anordnen.

2) Wieviele Diagonalen gibt es in einem ebenen, konvexen n-Eck?
Zeige: es gibt $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen.

3) Eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Gebiete.
In wieviele Gebiete kann die Ebene durch n Geraden höchstens zerlegt werden?
Zeige: man kann die Ebene in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen.

4) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck?
Zeige: die Winkelsumme in einem konvexen n-Eck ist $(n-2) \cdot 180°$.

5) Wieviele Elemente enthält die Potenzmenge einer n-elementigen Menge?
Zeige: die Potenzmenge enthält 2^n Elemente.

6) Zeige das „Schubfachprinzip": Werden n Objekte in k Fächer gegeben, wobei $k < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.

7) p teilt $n^{p-1} - 1$, wenn p prim ist und $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$ gilt (sogenannter „kleiner Fermat").

8) Zeige $1010...1010_{(2)} = \frac{2 \cdot (4^n - 1)}{3}$
Dabei steht die Ziffergruppe $10_{(2)}$ genau n-mal hintereinander (im Zweiersystem).

9) Zeige: mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \ldots \bullet \mathbf{A}}_{n \text{ Stück}} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10) Zeige: mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \ldots \bullet \mathbf{A}}_{n \text{ Stück}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

11) Zeige: mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \ldots \bullet \mathbf{A}}_{n \text{ Stück}} \;=\; 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

12) Seien $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n > 0$ positive reelle Zahlen mit $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = 1$.
Zeige: Dann gilt $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n \geq n$.

Aufgaben zur vollständigen Induktion – Beweise

A. Teilbarkeit

A 1: $n^2 + n$ ist eine gerade (d. h. durch 2 teilbare) Zahl für alle $n \geq 0$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0$: $0^2 + 0 = 0$ ist eine gerade Zahl

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> Es gelte die Induktionsvoraussetzung: $n^2 + n$ ist eine gerade Zahl

<u>Zu zeigen:</u> Die Behauptung gilt auch für $(n+1)$, also zu zeigen:
$(n+1)^2 + (n+1)$ ist eine gerade Zahl.

<u>Beweis des Induktionsschlusses:</u>

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= n^2 + 3n + 2 \\ &= (n^2+n) + (2n+2) \\ &= (n^2+n) + 2(n+1)\end{aligned}$$

ist eine gerade Zahl, weil der erste Summand gerade ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 2 ist.

Bei allen folgenden Aufgaben werden lediglich noch der Induktionsanfang und der Induktionsschluss aufgeschrieben. Auf das nochmalige Aufschreiben der Induktionsvoraussetzung wird verzichtet, da das Prinzip immer das gleiche ist.

A 2: $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \geq 0$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0$: $0^3 + 2\cdot 0 = 0$ ist durch 3 ohne Rest teilbar.

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 \\ &= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

ist durch 3 teilbar, da der erste Summand durch 3 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist.

A 3: $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $4 \cdot 0^3 - 0 = 0$ ist durch 3 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}4(n+1)^3 - (n+1) &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1\\ &= 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 - n - 1\\ &= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3\\ &= 4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3\\ &= (4n^3 - n) + 3(4n^2 + 4n + 1)\end{aligned}$$

ist durch 3 teilbar, da der erste Summand durch 3 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist.

A 4: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $0^3 - 0 = 0$ ist durch 6 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1\\ &= n^3 + 3n^2 + 2n\\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n\\ &= (n^3 - n) + 3n(n+1)\end{aligned}$$

Der erste Summand $(n^3 - n)$ ist durch 6 teilbar nach Induktionsvoraussetzung.
Der zweite Summand $3n(n+1)$ ist durch 3 teilbar und durch 2 teilbar, da entweder n oder die darauf folgende natürliche Zahl (n+1) eine gerade Zahl ist. Ist aber eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar, dann ist sie auch durch 6 teilbar.
Da beide Summanden durch 6 teilbar sind, muss auch die Summe durch 6 teilbar sein.

A 5: $2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 0 = 0$ ist durch 6 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1) &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + (n + 1)\\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 3 + n + 1\\ &= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\\ &= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6\\ &= (2n^3 + 3n^2 + n) + 6(n^2 + 2n + 1)\end{aligned}$$

ist durch 6 teilbar, da der erste Summand durch 6 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 6 ist.

A 6: $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $0^3 - 6 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 = 0$ ist durch 6 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 14(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 6(n^2 + 2n + 1) + 14(n + 1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6n^2 - 12n - 6 + 14n + 14 \\ &= n^3 - 3n^2 + 5n + 9 \\ &= n^3 - 6n^2 + 14n + 3n^2 - 9n + 9 \\ &= (n^3 - 6n^2 + 14n) + 3(n^2 - 3n + 3)\end{aligned}$$

ist durch 3 teilbar, da der erste Summand durch 3 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist.

A 7: $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar für alle $n \geq 1$

Induktionsanfang: $3^1 - 3 = 0$ ist durch 6 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}3^{n+1} - 3 &= 3 \cdot 3^n - 3 \\ &= 2 \cdot 3^n + 3^n - 3 \\ &= (2 \cdot 3^n) + (3^n - 3) \\ &= (2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1}) + (3^n - 3) \\ &= (6 \cdot 3^{n-1}) + (3^n - 3)\end{aligned}$$

ist durch 6 teilbar, da der zweite Summand durch 6 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der erste Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 6 ist (wegen $n \geq 1$ ist 3^{n-1} eine ganze Zahl).

A 8: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar für $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$ ist durch 9 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3] + 9(n^2 + 3n + 3)\end{aligned}$$

ist durch 9 teilbar, da der erste Summand durch 9 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 9 ist.

A 9: $7^{2n} - 2^{n}$ ist durch 47 teilbar für $n \geq 0$

Induktionsanfang: n = 0: $7^0 - 2^0 = 0$ ist durch 47 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}7^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 7^{2n+2} - 2^{n+1}\\ &= 7^{2n}\cdot 7^2 - 2^n\cdot 2^1\\ &= 49\cdot 7^{2n} - 2\cdot 2^n\\ &= 49\cdot 7^{2n} - 49\cdot 2^n + 47\cdot 2^n\\ &= 49(7^{2n} - 2^n) + 47\cdot 2^n\end{aligned}$$

ist durch 47 teilbar, da der erste Summand ein ganzzahliges Vielfaches der Induktionsvoraussetzung ist (das 49-fache) und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 47 ist.

A 10: $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar für $n \geq 0$

Induktionsanfang: n = 0: $5^0 + 7 = 8$ ist durch 4 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}5^{n+1} + 7 &= 5\cdot 5^n + 7\\ &= 4\cdot 5^n + 5^n + 7\\ &= 4\cdot 5^n + (5^n + 7)\end{aligned}$$

ist durch 4 teilbar, da der erste Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 4 ist und der zweite Summand durch 4 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung.

A 11: $5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: n = 0: $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ ist durch 8 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}5^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)} &= 5^{2n+2} - 3^{2n+2}\\ &= 25\cdot 5^{2n} - 9\cdot 3^{2n}\\ &= 24\cdot 5^{2n} + 1\cdot 5^{2n} - 8\cdot 3^{2n} - 1\cdot 3^{2n}\\ &= (5^{2n} - 3^{2n}) + 8(3\cdot 5^{2n} - 3^{2n})\end{aligned}$$

ist durch 8 teilbar, da der erste Summand durch 8 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 8 ist.

A 12: $2^{3n} + 13$ ist durch 7 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: n = 0: $2^0 + 13 = 14$ ist durch 7 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} + 13 &= 2^{3n+3} + 13 \\ &= 8 \cdot 2^{3n} + 13 \\ &= 7 \cdot 2^{3n} + (2^{3n} + 13) \end{aligned}$$

ist durch 7 teilbar, da der erste Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 7 ist und der Klammerausdruck durch 7 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung.

A 13: Für alle $a \in N$ ($a \geq 2$) ist ($a^n - 1$) durch ($a-1$) teilbar für alle $n \in N$ mit $n \geq 1$

Untersuche zunächst die Behauptung

A 13*: Für jedes $a \geq 2$ ist $\frac{a^n - 1}{a-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ für alle $n \in N$ mit $n \geq 1$

Induktionsanfang: n = 1: $\frac{a^1 - 1}{a-1} = 1$ (ganze Zahl), d. h. ($a^1 - 1$) ist durch (a -1) teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} + a^n &= (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}) + a^n \\ &= \frac{a^n - 1}{a-1} + a^n \\ &= \frac{a^n - 1 + a^{n+1} - a^n}{a-1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a-1} \qquad \text{qed,} \end{aligned}$$

Wegen Behauptung A 13* ist der Quotient $\frac{a^n - 1}{a-1}$ immer eine ganze Zahl, für alle $n \geq 1$, so dass die Behauptung A 13 richtig ist.

A 14: $n^7 - n$ ist durch 7 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: n = 0: $0^7 - 0 = 0$ ist ohne Rest durch 7 teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} (n+1)^7 - (n+1) &= n^7 + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 1 - n - 1 \\ &= (n^7 - n) + 7(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + 1) \end{aligned}$$

ist durch 7 teilbar, da der erste Summand durch 7 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 7 ist.

A 15: $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ ist durch 5 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $3^{0+1} + 2^{3\cdot 0+1} = 3 + 2 = 5$ ist teilbar durch 5.

Induktionsschluss:

$$
\begin{aligned}
3^{(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} &= 3^{n+2} + 2^{3n+4} \\
&= 3\cdot 3^{n+1} + 8\cdot 2^{3n+1} \\
&= 3(3^{n+1} + 2^{3n+1}) + 5\cdot 2^{3n+1}
\end{aligned}
$$

ist durch 5 teilbar, da der erste Summand ein ganzzahliges Vielfaches der Induktionsvoraussetzung ist und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 5 ist.

A 16: $3n^5 + 5n^3 + 7n$ ist durch 15 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $3\cdot 0^5 + 5\cdot 0^3 + 7\cdot 0 = 0$ ist durch 15 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$
\begin{aligned}
&3(n+1)^5 + 5(n+1)^3 + 7(n+1) \\
&\quad = 3(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 7(n + 1) \\
&\quad = 3n^5 + 15n^4 + 30n^3 + 30n^2 + 15n + 3 + 5n^3 + 15n^2 + 15n + 5 + 7n + 7 \\
&\quad = 3n^5 + 15n^4 + 35n^3 + 45n^2 + 37n + 15 \\
&\quad = (3n^5 + 5n^3 + 7n) + (15n^4 + 30n^3 + 45n^2 + 30n + 15) \\
&\quad = (3n^5 + 5n^3 + 7n) + 15(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1)
\end{aligned}
$$

ist durch 15 teilbar, da der erste Summand durch 15 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 15 ist.

A 17: $3^{2n} + 7$ ist durch 8 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $3^{2\cdot 0} + 7 = 7 + 1 = 8$ ist durch 8 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\
&= 3^2\cdot 3^{2n} + 7 \\
&= 9\cdot 3^{2n} + 7 \\
&= (3^{2n} + 7) + 8\cdot 3^{2n}
\end{aligned}
$$

ist durch 8 teilbar, da der erste Summand durch 8 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 8 ist.

A 18: $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $0^3 + 5 \cdot 0 = 0$ ist durch 6 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= n^3 + 3n^2 + 8n + 6 \\ &= (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) \\ &= (n^3 + 5n) + 3n(n + 1) + 6\end{aligned}$$

Der erste Summand $(n^3 + 5n)$ ist durch 6 teilbar nach Induktionsvoraussetzung.
Der zweite Summand $3n(n + 1)$ ist ein Vielfaches von 3 und ein Vielfaches von 2, da entweder n oder die natürliche Nachfolgezahl (n+1) eine gerade Zahl ist.
Da der zweite Summand durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist er auch durch 6 teilbar.
Der dritte Summand 6 ist sowieso durch 6 teilbar.
Da alle drei Summanden durch 6 teilbar sind, ist auch die Summe durch 6 teilbar.

A 19: $n^4 – 4n^2$ ist durch 3 teilbar für alle $n \geq 2$

Induktionsanfang: $n = 2$: $2^4 - 4 \cdot 2^2 = 0$ ist durch 3 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(n+1)^4 - 4(n+1)^2 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 4(n^2 + 2n + 1) \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 8n - 4 = n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n - 3 \\ &= (n^4 - 4n^2) + (4n^3 + 6n^2 - 4n - 3) \\ &= (n^4 - 4n^2) + (3n^3 + 6n^2 - 3n - 3) + (n^3 - n) \\ &= (n^4 - 4n^2) + 3(n^3 + 2n^2 - n - 1) + n(n^2 - 1) \\ &= (n^4 - 4n^2) + 3(n^3 + 2n^2 - n - 1) + n(n-1)(n+1)\end{aligned}$$

Der erste Summand ist durch 3 teilbar nach Induktionsvoraussetzung.
Der zweite Summand ist ein ganzzahliges Vielfaches von 3.
Der dritte Summand enthält drei aufeinander folgende natürliche Zahlen (n-1), n und (n+1), wobei dann einer dieser drei Zahlen durch 3 teilbar sein muss.
Da alle drei Summanden durch 3 teilbar sind, ist auch die Summe durch 3 teilbar.

A 20: $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ ist durch 9 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 1 + 3 \cdot 16 + 5 = 54$ ist durch 9 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+1+2} + 5 &= 10 \cdot 10^n + 3 \cdot 4 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= 10 \cdot 10^n + 12 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= (10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5) + (9 \cdot 10^n + 9 \cdot 4^{n+2}) \\ &= (10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5) + 9(10^n + 4^{n+2})\end{aligned}$$

ist durch 9 teilbar, da der erste Summand durch 9 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 9 ist.

A 21: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $4^0 + 15\cdot 0 - 1 = 0$ ist durch 9 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 &= 4\cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\ &= (4^n + 15n - 1) + (3\cdot 4^n + 15) \\ &= (4^n + 15n - 1) + 3(4^n + 5) \end{aligned}$$

Der erste Summand ist durch 9 teilbar nach Induktionsvoraussetzung.
Beim zweiten Summanden ist bereits eine 3 als Faktor enthalten. Wenn der zweite Faktor $(4^n + 5)$ ebenfalls ein Vielfaches von 3 wäre, dann ist der Summand $3(4^n + 5)$ ein Vielfaches von 9 und der Beweis wäre komplett.
Also noch zu zeigen:

A 21*: $4^n + 5$ ist durch 3 teilbar für alle $n \geq 0$

Beweis wieder durch Induktion:

Induktionsanfang: $n = 0$: $4^0 + 5 = 6$ ist durch 3 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 &= 4\cdot 4^n + 5 \\ &= (4^n + 5) + 3\cdot 4^n \end{aligned}$$

ist durch 3 teilbar, da der erste Summand durch 3 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist.

Damit ist auch A 21 vollständig bewiesen!

A 22: $5^{2n} + 24n - 1$ ist durch 48 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $5^{2\cdot 0} + 24\cdot 0 - 1 = 0$ ist durch 48 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} + 24(n+1) - 1 &= 5^{2n+2} + 24n + 24 - 1 \\ &= 25\cdot 5^{2n} + 24n + 24 - 1 \\ &= (5^{2n} + 24n - 1) + (24\cdot 5^{2n} + 24) \\ &= (5^{2n} + 24n - 1) + 24(5^{2n} + 1) \end{aligned}$$

Der erste Summand ist durch 48 teilbar nach Induktionsvoraussetzung.
Der zweite Summand besteht aus einem Produkt, bei dem der erste Faktor 24 ist. Damit der gesamte Summand $24(5^{2n} + 1)$ durch 48 teilbar wird, muss der zweite Faktor $(5^{2n} + 1)$ durch 2 teilbar sein. Damit wäre die Behauptung 22 bewiesen.

Noch zu zeigen:

A 22*: $5^{2n} + 1$ ist durch 2 teilbar für alle $n \geq 0$

Beweis wieder mit vollständiger Induktion:

<u>Induktionsanfang:</u> $5^{2\cdot 0} + 1 = 2$ ist durch 2 ohne Rest teilbar.

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} + 1 &= 5^{2n+2} + 1 \\ &= 25\cdot 5^{2n} + 1 \\ &= (5^{2n} + 1) + 24\cdot 5^{2n} \end{aligned}$$

ist durch 2 teilbar, da der erste Summand durch 2 teilbar ist nach Induktionsvoraussetzung und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 2 ist.

A 23: $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar für alle $n \geq 1$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 1$: $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 121 + 12 = 133$ ist durch 133 ohne Rest teilbar.

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} \\ &= 11\cdot 11^{n+1} + 12^2\cdot 12^{2n-1} \\ &= 11\cdot 11^{n+1} + 144\cdot 12^{2n-1} \\ &= 11(11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133\cdot 12^{2n-1} \end{aligned}$$

ist durch 133 teilbar, da der erste Summand ein ganzzahliges Vielfaches der Induktionsvoraussetzung ist und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 133 ist.

A 24: Für $a \in N$ mit $a \geq 1$ ist $(2a – 1)^n – 1$ eine gerade Zahl für alle $n \geq 0$

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 0$: $(2a – 1)^0 – 1 = 1 – 1 = 0$ ist eine gerade Zahl.

<u>Induktionsschluss:</u>

$$(2a – 1)^{n+1} – 1 = (2a – 1)(2a – 1)^n – 1$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(2a – 1)^n – 1$ eine gerade Zahl. Daher ist der Minuend $(2n – 1)^n$ ungerade, kann also in der Form $(2z + 1)$ dargestellt werden mit irgendeiner natürlichen Zahl z.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2a – 1)(2a – 1)^n – 1 &= (2a – 1)(2z + 1) – 1 \\ &= 4az + 2a – 2z – 1 – 1 \\ &= 2(2az + a – z – 1) \end{aligned}$$

Damit ist dieser Ausdruck wieder eine gerade Zahl, da er ein ganzzahliges Vielfaches von 2 ist.

A 25: Für $a \in N$ ist $[a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}]$ durch $(a^2 + a + 1)$ teilbar für alle $n \geq 1$

Induktionsanfang: $n = 1$: $a^{1+1} + (a+1)^{21-1} = a^2 + (a+1)^1 = a^2 + a + 1$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $a^2 + a + 1$.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} a^{n+1+1} + (a+1)^{2(n+1)-1} &= a^{n+2} + (a+1)^{2n+1} \\ &= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^2 \cdot (a+1)^{2n-1} \\ &= a \cdot a^{n+1} + (a^2 + 2a + 1) \cdot (a+1)^{2n-1} \\ &= a[a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}] + (a^2 + a + 1)(a+1)^{2n-1} \end{aligned}$$

ist durch $(a^2 + a + 1)$ teilbar, da der erste Summand ein ganzzahliges (a-faches) Vielfaches der Induktionsvoraussetzung ist und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von $(a^2 + a + 1)$ ist.

A 26: Für $a \in N$ mit $a \geq 1$ ist $(a^{2n+1} - a)$ durch 6 teilbar für alle $n \geq 0$

Induktionsanfang: $n = 0$: $a^{2 \cdot 0+1} - a = a^1 - a = 0$ ist durch 6 ohne Rest teilbar.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} - a &= a^{2n+3} - a \\ &= a^2 \cdot a^{2n+1} - a \\ &= (a^2 - 1)a^{2n+1} + (a^{2n+1} - a) \\ &= (a - 1) \cdot a \cdot (a + 1) \cdot a^{2n+1} + (a^{2n+1} - a) \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist durch 6 teilbar nach Induktionsvoraussetzung.
Der erste Summand enthält drei aufeinander folgende natürliche Zahlen $(a - 1)$, a und $(a + 1)$. Von diesen drei aufeinander folgenden Zahlen ist mindestens eine Zahl durch 2 teilbar und genau eine durch 3 teilbar (es könnte auch sein, dass es unter diesen drei Zahlen eine gibt, die durch 2 und durch 3 teilbar ist). Das Produkt dieser drei Zahlen ist dann aber durch 6 teilbar, da 2 und 3 als Teiler vorkommen. Damit ist der gesamte erste Summand $(a - 1) \cdot a \cdot (a + 1) \cdot a^{2n}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 6 und die Behauptung ist bewiesen.

B. Summenwerte

B 1: $\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: nur ein Summand: 1

rechte Seite: $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{q.e.d.}$$

B 2: $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1^2 = 1$

rechte Seite: $\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad \text{q.e.d.}$$

B 3: $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1^3 = 1$

rechte Seite: $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot[n^2+4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4} \qquad \text{q.e.d.}$$

Die zweite Behauptung: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ folgt sofort mit B 1.

B 4: $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ (für alle n ≥ 1)

Induktionsanfang: n = 0: linke Seite: $1^4 = 1$

rechte Seite: $\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)(3\cdot 1^2+3\cdot 1-1)}{30} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 + (n+1)^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^4}{30} + \frac{(n+1)\cdot[n\cdot(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3]}{30}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(6n^4+6n^3-2n^2+3n^3+3n^2-n+30n^3+90n^2+90n+30)}{30}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)}{30} = \frac{(n+1)\cdot[(n+2)(6n^3+27n^2+37n+15)]}{30}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)\cdot(3n^2+9n+5)}{30} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)\cdot(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30}$$ q.e.d.

B 5: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (für alle n ≥ 1)

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: 1

rechte Seite: $1^2 = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$ q.e.d.

B 6: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{2n(2n-1)(2n+1)}{6}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $1^2 = 1$

rechte Seite: $\frac{2\cdot 1\cdot(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = \frac{2n(2n-1)(2n+1)}{6} + (2n+1)^2$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n+1)+6(2n+1)^2}{6} + \frac{(2n+1)\cdot[2n\cdot(2n-1)+6(2n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(4n^2-2n+12n+6)}{6} = \frac{(2n+1)\cdot(4n^2+10n+6)}{6}$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}{6} = \frac{2(n+1)\cdot(2(n+1)-1)\cdot(2(n+1)+1)}{6} \quad \text{q.e.d.}$$

B 7: $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: 1

rechte Seite: $\frac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{2} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) = \sum_{k=1}^{n}(3k-2) + (3(n+1)-2) = \frac{n(3n-1)}{2} + (3n+1) = \frac{3n^2-n+6n+2}{2}$$

$$= \frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{(n+1)\cdot(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(3(n+1)-1)}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

B 8: $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n-1) = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 2n^2 + n$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: 3

rechte Seite: $2\cdot 1^3 + 1 = 3$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(4k-1) = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) + (4(n+1)-1) = 2n^2 + n + 4n + 4 - 1 = 2n^2 + 5n + 3$$

$$= (2n^2 + 4n + 2) + (n + 1) = 2(n+1)^2 + (n+1) \quad \text{q.e.d.}$$

B 9: $\mathbf{1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1}$ **(für alle n ≥ 0)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: 1
rechte Seite: $2^{0+1} - 1 = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$ q.e.d.

B 10: $\mathbf{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ **(für alle n ≥ 0)**

Induktionsanfang: n = 0: linke Seite: 1
rechte Seite: $\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$ q.e.d.

B 11: $\mathbf{1 + \frac{2^0}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \ldots + \frac{2^{2(n-1)}}{3^n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 0: linke Seite: $1 + \frac{2^0}{3^1} = \frac{4}{3}$
rechte Seite: $\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$

Induktionsschluss:

$$1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} + \frac{2^{2(n+1-1)}}{3^{n+1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{2^{2n}}{3^{n+1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{4^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{3 \cdot 4^n + 4^n}{3 \cdot 3^n}$$

$$= \frac{4 \cdot 4^n}{3 \cdot 3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$ q.e.d.

B 12: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ (für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1^2 = 1$

rechte Seite: $(-1)^{1-1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^n \cdot (n+1)^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n \cdot (n+1)^2$$

$$= -(-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot (n+1)^2}{2} = \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot (n+1)^2 - (-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{2} =$$

$$(-1)^n \cdot \frac{(n+1) \cdot (2n+2-n)}{2} = (-1)^n \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

B 13: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1 \cdot 2 = 2$

rechte Seite: $\frac{1 \cdot (1+1)(1+2)}{3} = 2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2(n+3)}{3} \quad \text{q.e.d.}$$

B 14: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

(mit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$) (für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1 \cdot 1! = 1$
rechte Seite: $(1 + 1)! - 1 = 2 - 1 = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)! \cdot (1 + n+1) - 1$$

$$= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1 \quad \text{q.e.d.}$$

B 15: 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + … + n(n+1)(n+2) = $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

= $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: 1·2·3 = 6

rechte Seite: $\dfrac{1\cdot(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = 6$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)+4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot(n+4)}{4}$$ q.e.d.

B 16: $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$ **=** $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ **(für alle n ≥ 1)**

bzw. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{k}$ **=** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

rechte Seite: $\dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{2}$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k}$$ q.e.d.

B 17: $\mathbf{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: 1

rechte Seite: $2\cdot\left(1-\frac{1}{2^1}\right) = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ q.e.d.}$$

B 18: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

rechte Seite: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{q.e.d.}$$

B 19: $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$$
(für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$

rechte Seite: $\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]}$$

$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n+1}{2n+3}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$ q.e.d.

B 20: $$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{n}{3n+1}$$
(für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{4}$

rechte Seite: $\frac{1}{3\cdot 1+1}=\frac{1}{4}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{[3(n+1)-2][3(n+1)+1]}=\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$=\frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3(n+1)+1}$$ q.e.d.

B 21: $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$

(für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}$

rechte Seite: $\frac{1}{4\cdot 1+1}=\frac{1}{5}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{[4(n+1)-3]\cdot[4(n+1)+1]}$$

$$=\frac{n}{4n+1}+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{n(4n+5)+1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{(4n+1)(n+1)}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$=\frac{n+1}{4n+5}=\frac{n+1}{4(n+1)+1}$$ q.e.d.

B 22:

$$\frac{1}{(1+3)\cdot(1+4)}+\frac{1}{(2+3)\cdot(2+4)}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$$

(für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $\frac{1}{(1+3)\cdot(1+4)}=\frac{1}{20}$

rechte Seite: $\frac{1}{4(1+4)}=\frac{1}{20}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)(k+4)}+\frac{1}{(n+1+3)\cdot(n+1+4)}$$

$$=\frac{n}{4(n+4)}+\frac{1}{(n+4)\cdot(n+5)}=\frac{n(n+5)+4}{4\cdot(n+4)\cdot(n+5)}=\frac{n^2+5n+4}{4\cdot(n+4)\cdot(n+5)}=\frac{(n+4)(n+1)}{4\cdot(n+4)\cdot(n+5)}$$

$$=\frac{n+1}{4(n+5)}$$ q.e.d.

B 23: $\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{n(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}=\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $\frac{4}{1\cdot 3}=\frac{4}{3}$

rechte Seite: $\frac{1\cdot(3\cdot 1+5)}{(1+1)(1+2)}=\frac{4}{3}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{4}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}+\frac{4}{(n+1)(n+3)}=\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}+\frac{4}{(n+1)(n+3)}$$

$$=\frac{n(3n+5)(n+3)+4(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{3n^3+14n^2+15n+4n+8}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{3n^3+14n^2+19n+8}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)(3n^2+11n+8)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{3n^2+11n+8}{(n+2)(n+3)}=\frac{(3n+8)(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)\cdot[3(n+1)+5]}{[(n+1)+1]\cdot[(n+1)+2]}$$ q.e.d.

B 24: $\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}$ **(für alle n ≥ 0)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 0: linke Seite: $\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{2}{3}$

rechte Seite: $\frac{(0+1)(0+4)}{(0+2)(0+3)}=\frac{2}{3}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{4}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}+\frac{4}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{(n+1)(n+4)^2+4}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{(n+1)(n^2+8n+16)+4}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{n^3+9n^2+24n+20}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{(n+2)(n^2+7n+10)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{(n+2)(n+5)}{(n+3)(n+4)}$$ q.e.d.

B 25: $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(für alle n ≥ 1)

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$

rechte Seite: $\frac{1\cdot(1+1)}{2\cdot(2\cdot 1+1)}=\frac{1}{3}$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+3)+2(n+1)^2}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)\cdot(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)\cdot(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot(n+2)(2n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$ q.e.d.

B 26: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+..+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ **= 2^n** **(für alle n ≥ 0)**

Definition: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ **Hilfsformel:** $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$

Induktionsanfang: n = 0: linke Seite: $\binom{0}{0}=1$

rechte Seite: $2^0 = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]+1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}+1$$

$$=2^n+1+\sum_{k=-1}^{n-1}\binom{n}{k}=2^n+1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{n}+\binom{n}{-1}=2^n+1+2^n-1+0$$

$= 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ q.e.d.

B 27: $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$

rechte Seite: $2-\frac{1+2}{2^1}=\frac{1}{2}$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}$$ q.e.d.

B 28: $1\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right)+2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)+...+(n-1)\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$= n\cdot\ln(n)-\ln(n!)$ **(für alle n ≥ 2)**

Induktionsanfang: n = 2: linke Seite: $1\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right)=\ln(2)$

rechte Seite: $2\cdot\ln(2)-\ln(2!)=\ln(2)$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)+n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n\cdot\ln(n)-\ln(n!)+n\cdot[\ln(n+1)-\ln(n)]$$

$$=n\cdot\ln(n)-\ln(n!)+n\cdot\ln(n+1)-n\cdot\ln(n)=n\cdot\ln(n+1)-\ln(n!)=(n+1)\cdot\ln(n+1)-\ln(n+1)-\ln(n!)$$

$$=(n+1)\cdot\ln(n+1)-[\ln(n+1)+\ln(n!)]=(n+1)\cdot\ln(n+1)-\ln[(n+1)\cdot n!]$$

$$=(n+1)\cdot\ln(n+1)-\ln[(n+1)!]$$ q.e.d.

B 29: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{n!-1}{n!}$ **(für alle n ≥ 2)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: linke Seite: $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$

rechte Seite: $\frac{2!-1}{2!}=\frac{1}{2}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)!}+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n!-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)(n!-1)+n}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n!-(n+1)+n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)\cdot n!-1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$ q.e.d.

B 30: $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1\cdot 2^1=2$
rechte Seite: $(1-1)\cdot 2^{1+1}+2=2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot 2^k=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k+(n+1)\cdot 2^{n+1}=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2+(n+1)\cdot 2^{n+1}=2n\cdot 2^{n+1}+2$$

$$=n\cdot 2^{n+2}+2$$ q.e.d.

B 31: Binomischer Lehrsatz: Für reelle Zahlen a und b gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(für alle } n \geq 0\text{)}$$

Definition: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ **Hilfsformel:** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Anmerkung: **Behauptung B 26 folgt aus dem Binomischen Lehrsatz sofort für a = b = 1**

Induktionsanfang: n = 0: linke Seite: $(a+b)^0 = 1$

rechte Seie: $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^{0-0} = 1$

Induktionsschluss:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^{n+1-0} - \binom{n}{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot b^{n+1-(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} - 0$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} \cdot a^0 \cdot b^{n+1-0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{q.e.d.}$$

B 32: $\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k} = 2^{n-1}\cdot(n+2)-1$

Induktionsanfang: **n = 1:** **linke Seite: (1 + 1) 1 = 2**
rechte Seite: 1 (1 + 2) –1 = 2

Induktionsschluss:

Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)\cdot\binom{n+1}{k} = 2^{n}\cdot(n+3)-1$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)\cdot\binom{n+1}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n+1}{k}\right) + (n+2)\cdot\binom{n+1}{n+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]\right) + n+2 \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k}\right)}_{2^{n-1}\cdot(n+2)-1} + \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k-1}\right) + n+2 \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)-1 + \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k-1}\right) + n+2 \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k-1}\right) \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + 2\cdot\binom{n}{0} + \left(\sum_{k=2}^{k=n}(k+1)\cdot\binom{n}{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Indexverschiebung: $m = k-1$ bzw. $k = m+1$:

$$= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + 2 + \left(\sum_{m=1}^{m=n-1}(m+2)\cdot\binom{n}{m}\right)$$

Übersichtshalber wird m wieder durch k ersetzt:

$$\begin{aligned}
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + 2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)\cdot\binom{n}{k}\right) \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + 2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\cdot\binom{n}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot\binom{n}{k}\right) \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + 2 + \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k}\right) - \underbrace{(n+1)\cdot\binom{n}{n}}_{=\ -n-1} + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right) \underbrace{-\binom{n}{0}-\binom{n}{n}}_{=\ -2} \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2)+n+1 + 2 + \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k}\right) - n-1 + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right) - 2 \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2) + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k}\right)}_{2^{n-1}\cdot(n+2)-1} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)}_{=\ 2^{n}} \\
&= 2^{n-1}\cdot(n+2) + 2^{n-1}\cdot(n+2)-1 + 2^{n} \\
&= 2\cdot2^{n-1}\cdot(n+2) + 2^{n} - 1 \\
&= 2^{n}\cdot(n+2) + 2^{n} - 1 \\
&= 2^{n}\cdot(n+3) - 1
\end{aligned}$$

C. Produktwerte

C 1: $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = \prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}$ (für alle n ≥ 1)

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $4^1 = 4$
rechte Seite: $2^{1\cdot(1+1)} = 2^2 = 4$

Induktionsschluss:

$$\prod_{k=1}^{n+1} 4^k = \left(\prod_{k=1}^{n} 4^k\right) \cdot 4^{n+1} = 2^{n(n+1)} \cdot 2^{2(n+1)} = 2^{n^2+n} \cdot 2^{2n+2} = 2^{n^2+3n+2} = 2^{(n+1)(n+2)} \qquad \text{q.e.d.}$$

C 2: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ (für alle n ≥ 2)

Induktionsanfang: n = 2: linke Seite: $\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
rechte Seite: $\frac{1}{2}$

Induktionsschluss:

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

C 3: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$ (für alle n ≥ 2)

Induktionsanfang: n = 2: linke Seite: $1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
rechte Seite: $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

Induktionsschluss:

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{k-1}{k}\right) = \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n+1-n}{n+1}\right) = \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{q.e.d.}$$

C 4: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ (für alle n ≥ 2)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: linke Seite: $1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

rechte Seite: $\frac{2+1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} \text{ q.e.d.}$$

C 5: $\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)$

$= \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}$ (für alle n ≥ 0)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 0: linke Seite: $1+\frac{1}{2^1} = \frac{3}{2}$

rechte Seite: $\frac{2^{2^1}-1}{2^{2^1-1}} = \frac{2^2-1}{2^{2-1}} = \frac{3}{2}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) = \left[\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$$

$$= \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}\cdot\frac{2^{2^{n+1}}+1}{2^{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\left(2^{2^{n+1}}\right)^2-1}{2^{2^{n+1}-1+2^{n+1}}}$$

$$= \frac{2^{2\cdot 2^{n+1}}-1}{2^{2\cdot 2^{n+1}-1}}$$

$$= \frac{2^{2^{n+2}}-1}{2^{2\cdot 2^{n+2}-1}} \qquad \text{q.e.d.}$$

C 6: $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n+n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(für alle } n \geq 1\text{)}$$

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1+\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$

rechte Seite: $2 - \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1+k}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+1+k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{n+1+n+1}\right)$$

$$= \left[\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+n+1}\right):\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]\cdot\left(\frac{2n+2+1}{2n+2}\right)$$

$$= \left[\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right):\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right):\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]\cdot\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)(2n+3)}{(n+1)(2n+1)(n+2)(2n+2)}$$

$$= \frac{2n+3}{n+2}$$

$$= \frac{2n+4-1}{n+2}$$

$$= \frac{2n+4}{n+2} - \frac{1}{n+2}$$

$$= 2 - \frac{1}{n+2} \qquad \text{q.e.d.}$$

C 7: $$\left(\frac{3}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

bzw. $$\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad \text{(für alle } n \geq 2)$$

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: linke Seite: $\left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9$

rechte Seite: $1^3 + 2^3 = 9$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \left[\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} k^3\right] \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} k^3\right] \cdot \left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{4n+4}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{4(n+1)}{n^2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

(wobei im Beweis die Formel B 3 verwendet wurde) q.e.d.

C 8: $$\left(1+\frac{2}{1}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1)$$

bzw. $$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} k \qquad \text{(für alle } n \geq 1)$$

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $1 + \frac{2}{1} = 3$

rechte Seite: $\sum_{k=1}^{1+1} k = 1 + 2 = 3$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{2}{k}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)\right] \cdot \left(1+\frac{2}{n+1}\right) = \left[\sum_{k=1}^{n+1} k\right] \cdot \left(\frac{n+3}{n+1}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{n+3}{n+1}$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \sum_{k=1}^{n+2} k$$ (wobei im Beweis die Formel B 1 verwendet wurde) q.e.d.

D. Ungleichungen

D 1: $\mathbf{n^2 - 2n - 1 > 0}$ **(für alle n ≥ 3)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 3: $3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2 > 0$

<u>Induktionsschluss:</u>

$(n+1)^2 - 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 1 = n^2 - 2 = (n^2 - 2n - 1) + (2n - 1)$

$> 2n - 1 > 0$ für alle n ≥ 3 q.e.d.

D 2: $$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n+1)} + \ldots + \frac{1}{1+(2n-1)} + \frac{1}{1+2n} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} > \frac{13}{24}$$ **(für alle n ≥ 2)**

Untersuche zunächst die Behauptung

D 2*: $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{13}{24}$$ **(für alle n ≥ 2)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{1+n}$$

$$> \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{13}{24} + \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{13}{24} + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > \frac{13}{24}$$ q.e.d.

Wegen $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (da die linke Summe einen Summanden mehr besitzt), gilt auch D2.

D 3: $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+(n+1)}+\ldots+\frac{1}{1+(3n-1)}+\frac{1}{1+3n}$ **=** $\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{1+k}$ **> 1 (für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $\sum_{k=1}^{3\cdot 1}\frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3} = \frac{13}{12} > 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=n+1}^{3(n+1)}\frac{1}{1+k} = \sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+3n+1}+\frac{1}{1+3n+2}+\frac{1}{1+3n+3}-\frac{1}{1+n}$$

$$> 1 + \frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{3(n+1)(3n+4)+(3n+2)(3n+4)+3(n+1)(3n+2)-3(3n+2)(3n+4)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}$$

$$= 1 + \frac{9n^2+12n+9n+12+9n^2+12n+6n+8+9n^2+6n+9n+6-27n^2-36n-18n-24}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}$$

$$= 1 + \frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} > 1$$ q.e.d.

D 4: $2^n > n + 1$ (für alle n ≥ 2)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: $2^2 = 4 > 3 = 2 + 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot(n + 1) = 2n + 2 = (n + 2) + n > n + 2$ q.e.d.

D 5: $2^n > n^2$ (für alle n ≥ 5)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 5: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ q.e.d.

D 6: $2^n > n^3$ **(für alle $n \geq 10$)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 10: $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$

<u>Induktionsschluss:</u>

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3 > n^3 + 7n^2 = n^3 + 3n^2 + 4n^2 = n^3 + 3n^2 + 3n^2 + n^2$

$> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$ q.e.d.

D 7: $$\frac{n}{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \left(\frac{1}{k}\right) < n$$ **(für alle $n \geq 2$)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: $\frac{2}{2} < \frac{3}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6} < 2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right)$$

Zwischenüberlegung: Der zweite Summand $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right)$ besitzt $(2^{n+1}-1) - (2^n-1) = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n$ Summanden. Es gilt:

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right) > 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1} - 1} > \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right) < 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$$

Damit gilt für die Ausgangssumme mit Hilfe dieser Überlegung und der Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right) > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right) < n + 1$$

und damit: $\frac{n+1}{2} < \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{k}\right) < n+1$ q.e.d.

D 8: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ **=** $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ **>** $\sqrt{n}$ **(für alle n ≥ 2)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} > 1{,}7 > 1{,}5 > \sqrt{2}$

Vorüberlegung zum Induktionsschluss:

$n+1 > n \;\Rightarrow\; n(n+1) > n^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{n(n+1)} > n \;\Rightarrow\; \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} + 1 > n+1 = \sqrt{(n+1}\cdot\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$ q.e.d.

D 9: $\mathbf{2^{n-1}\cdot(a^n + b^n) > (a + b)^n}$ **(a ≠ b; a + b > 0) (für alle n ≥ 2)**

Vorüberlegung zum Induktionsanfang:

Wegen a ≠ b ist $0 < (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 > 2ab$

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2:

$2^{2-1}\cdot(a^2 + b^2) = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 > a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

Vorüberlegung zum Induktionsschluss:

Da nach Voraussetzung a ≠ b, sei z. B. $|a| > |b|$ (a = b wird in der Voraussetzung ausgeschlossen und a = -b kann auch nicht sein, da sonst a + b = 0 in Widerspruch zur Voraussetzung wäre).

Falls $|a| < |b|$, folgt die Behauptung entsprechend.

Behauptung: $a^n > b^n$ für $n \in \aleph$. Beweis durch Fallunterscheidung, siehe nächste Seite...

1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$: Wegen $|a| > |b|$ und damit $a > b$ folgt sofort $a^n > b^n$.

2. Fall: $a > 0$ und $b < 0$: Unter Anwendung des ersten Falls gilt:

$$a^n = |a|^n > |b|^n \geq b^n$$

3. Fall: $a < 0$ und $b > 0$: Wegen $|a| > |b|$ also $-a > b \Leftrightarrow a + b < 0$ entfällt dieser Fall, da er der Voraussetzung widerspricht.

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$: Wegen der Voraussetzung $a + b > 0$ entfällt auch dieser Fall.

Damit ist die Vorüberlegung bewiesen.

Aus der Vorüberlegung folgt aus der Behauptung für $n = 1$ insbesondere $a > b$.

Damit ergibt sich $(a - b) > 0$ und $(a^n - b^n) > 0$

$$\Rightarrow \; 0 < (a - b)\cdot(a^n - b^n) = a^{n+1} - ab^n - a^nb + b^{n+1} \;\Leftrightarrow\; a^{n+1} + b^{n+1} > ab^n + a^nb$$

Diese Ungleichung wird im Induktionsschluss benötigt.

Induktionsschluss:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)\cdot(a + b)^n < (a + b)\cdot 2^{n-1}\cdot(a^n + b^n) = 2^{n-1}\cdot(a^{n+1} + ab^n + a^nb + b^{n+1})$$

$$= 2^{n-1}\cdot[(a^{n+1} + b^{n+1}) + (ab^n + a^nb)] < 2^{n-1}\cdot[(a^{n+1} + b^{n+1}) + (a^{n+1} + b^{n+1})]$$

$$= 2\cdot 2^{n-1}\cdot(a^{n+1} + b^{n+1}) = 2^n\cdot(a^{n+1} + b^{n+1})$$ q.e.d.

D 10: $n! > 2^n$ (für alle $n \geq 4$)

Induktionsanfang: $n = 4$: $4! = 24 > 16 = 2^4$

Induktionsschluss:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! > (n+1)\cdot 2^n > 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$ q.e.d.

D 11: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ **(für alle n ≥ 2)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: $\frac{4^2}{2+1} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} < 6 = \frac{24}{4} = \frac{(2\cdot 2)!}{(2!)^2}$

Vorüberlegung zum Induktionsschluss:

$2n^2 + 4n + 2 < 2n^2 + 5n + 2 \quad \Rightarrow \quad 2(n+1)^2 < (2n+1)(n+2) \quad \Rightarrow \quad \frac{2(n+1)}{n+2} < \frac{2n+1}{n+1}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4\cdot 4^n}{n+2} = \frac{4^n}{n+1}\cdot 2\cdot \frac{2(n+1)}{n+2} < \frac{4^n}{n+1}\cdot 2\cdot \frac{2n+1}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot 2\cdot \frac{2n+1}{n+1}\cdot \frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} = \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} \qquad \text{q.e.d.}$$

D 12: $\mathbf{1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} > (n+1)\cdot n^2}$ **(für alle n ≥ 6)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 6: $\sum_{k=1}^{6} k\cdot 2^{k-1} = 1\cdot 2^0 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + 6\cdot 2^5$

$= 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 = 321 > 252 = 7\cdot 6^2$

Vorüberlegung zum Induktionsschluss:

Für $n \ge 6$ ist nach der Behauptung D 5: $2^n > n^2 \ge 5n = 3n + 2n > 3n + 2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} + (n+1)\cdot 2^n > (n+1)n^2 + (n+1)\cdot 2^n = (n+1)(n^2 + 2^n) > (n+1)(n^2 + 3n + 2)$$

$= (n+1)(n+2)(n+1) = (n+2)(n+1)^2 \qquad$ q.e.d.

D 13: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ **=** $\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}$ **≥ 1 +** $\frac{n}{2}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^1}=1{,}5 \geq 1{,}5 = 1+\frac{1}{2}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} \geq 1+\frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k} > 1+\frac{n}{2} + 2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{n+1}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

D 14: $n\cdot\sqrt{n} > n+\sqrt{n}$ **(für alle n ≥ 3)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 3: $3\cdot\sqrt{3} > 5 > 3+\sqrt{3}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$(n+1)\cdot\sqrt{n+1} = n\cdot\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > n\cdot\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > n+\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > (n+1)+\sqrt{n+1} \quad \text{q.e.d.}$$

D 15: $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n = \prod_{k=1}^{n}k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $1^1 = 1 \leq 1 = 1^{\frac{1\cdot(1+1)}{2}}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\prod_{k=1}^{n+1}k^k = \left[\prod_{k=1}^{n}k^k\right]\cdot(n+1)^{n+1} \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(n+1)^{n+1} < (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(n+1)^{n+1}$$

$$= (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n+1} = (n+1)^{\frac{n^2+n+2n+2}{2}} = (n+1)^{\frac{n^2+3n+2}{2}} = (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \quad \text{q.e.d.}$$

D 16: $\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\ldots\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot\sqrt{k}}<3-\frac{2}{\sqrt{n}}$ **(für alle n ≥ 2)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 2: $\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}<1{,}4<1{,}5<3-\sqrt{2}=3-\frac{2}{\sqrt{2}}$

Vorüberlegung zum Induktionsschluss:

$3n+4>0 \quad\Rightarrow\quad 12n+4>9n \quad\Rightarrow\quad 4n^3+12n^2+12n+4>4n^3+12n^2+9n$

$\Rightarrow\quad 4(n+1)^3>n(4n^2+12n+9) \quad\Rightarrow\quad \frac{4(n+1)}{n}>\frac{4n^2+12n+9}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow\quad 4\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)>\frac{(2n+3)^2}{(n+1)^2} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}>\frac{2n+3}{n+1}=\frac{2n+2}{n+1}+\frac{1}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow\quad 2\sqrt{\frac{n+1}{n}}-2>\frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}>\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$\Rightarrow\quad \frac{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}>\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}}$

$\Rightarrow\quad -\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}}<-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}+\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}}<3-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}}<3-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$ q.e.d.

D 17: Ungleichung von Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$ für x > -1; x ≠ 0 (für alle n ≥ 1)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $(1+x)^1=1+x\geq 1+1\cdot x$

<u>Induktionsschluss:</u>

$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n\cdot(1+x)\geq(1+nx)(1+x)=1+x+nx+nx^2\geq 1+nx+x=1+(n+1)x$ q.e.d.

D 18: $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)\cdot x$ für $0 \leq x \leq 1$ (für alle $n \geq 1$)

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $(1+x)^1 = 1 + x \leq 1 + x = 1 + (2^1-1)\cdot x$

<u>Induktionsschluss:</u>

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n\cdot(1+x) \leq [1+(2^n-1)x]\cdot(1+x) = 1 + 2^n\cdot x - x + x + 2^n\cdot x^2 - x^2$

$= 1 + 2^n\cdot x + (2^n\cdot x - x)\cdot x \leq 1 + 2^n\cdot x + 2^n\cdot x - x = 1 + 2\cdot 2^n\cdot x - x = 1 + 2^{n+1}\cdot x - x$

$= 1 + (2^{n+1} - 1)x$ q.e.d.

Rainer Müller, Armin Moritz (Johanneum-Gymnasium Herborn)

E. Rekursive Folgen Lösungen

E 1: $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ $\Rightarrow$ $a_n = \frac{n+1}{n}$

<u>Induktionsanfang:</u> $a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5 = \frac{2+1}{2}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$a_{n+2} = 2 - \frac{1}{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

E 2: $a_1 = 2;\ a_n = a_{n-1} + n\cdot 2^n$ $\Rightarrow$ $a_n = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1}$

<u>Induktionsanfang:</u> $a_2 = a_1 + 2\cdot 2^2 = 2 + 8 = 10 = 2 + 8 = 2 + 1\cdot 2^3 = 2 + (2-1)\cdot 2^{2+1}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)\cdot 2^{n+1} = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1} + (n+1)\cdot 2^{n+1} = 2 + 2n\cdot 2^{n+1} = 2 + n\cdot 2^{n+2} \qquad \text{q.e.d.}$$

E 3: $a_1 = 2;\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{1}{a_n}\right)$ $\Rightarrow$ $1 \le a_n \le 2$ **für alle n ≥ 1**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $1 \le 2 = a_1 \le 2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{1}{a_n}\right) = 1 + \frac{1}{2a_n} \ge 1 + \frac{1}{2\cdot 2} = 1{,}25 > 1 \qquad \text{und}$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2a_n} \le 1 + \frac{1}{2\cdot 1} = 1{,}5 < 2 \qquad \text{q.e.d.}$$

E 4: $\mathbf{a_1 = \sqrt{2}\ ;\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}} \Rightarrow \quad \mathbf{a_n \leq 2}$

<u>Induktionsanfang:</u> $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$ q.e.d.

E 5: Definition einer Fibonacci-Folge: $\mathbf{F_1 = 1,\ F_2 = 1}$ **und** $\mathbf{F_{n+2} = F_n + F_{n+1}}$

($F_3 = 2$; $F_4 = 3$; $F_5 = 5$; $F_6 = 8$; $F_7 = 13$, $F_8 = 21$; …)

Für diese Fibonacci-Folge gelten folgende Behauptungen:

E 5 a: $\mathbf{F_{n+2} = 1 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $F_{1+2} = F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$

rechte Seite: $1 + F_1 = 1 + 1 = 2$

<u>Induktionsschluss:</u>

$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} F_k$ q.e.d.

E 5 b: $\mathbf{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $F_1^2 = 1^2 = 1$

rechte Seite: $F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1$

<u>Induktionsschluss:</u>

$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$ q.e.d.

E 5 c: $\mathbf{F_{m+n} = F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}}$ **(für alle m ≥ 2 und n ≥ 1)**

Induktionsanfang: m = 2, n = 1: linke Seite: $F_{2+1} = F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$

rechte Seite: $F_1 \cdot F_1 + F_2 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

m = 3, n = 1: linke Seite: $F_{3+1} = F_4 = 3$

rechte Seite: $F_2 \cdot F_1 + F_3 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$

Induktionsschluss:

1. Schritt: m = 2, n variabel:

zu zeigen: $F_{2+n+1} = F_1 \cdot F_{n+1} + F_2 \cdot F_{n+2}$:

Beweis: Mit $F_1 = F_2 = 1$ folgt:

$F_{2+(n+1)} = F_{3+n} = F_{1+n} + F_{2+n} = 1 \cdot F_{n+1}\ 1 \cdot F_{n+2} = F_1 \cdot F_{n+1} + F_2 \cdot F_{n+2}$ q.e.d.

m = 3, n variabel::

zu zeigen: $F_{3+n+1} = F_2 \cdot F_{n+1} + F_3 \cdot F_{n+2}$:

Beweis: $F_{3+(n+1)} = F_{4+n} = F_{2+n} + F_{3+n} = F_{n+2} + F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+1} + 2 \cdot F_{n+2}$

$= 1 \cdot F_{n+1} + 2 \cdot F_{n+2} = F_2 \cdot F_{n+1} + F_3 \cdot F_{n+2}$ q.e.d.

2. Schritt: n fest, Induktionsschluss auf m:

zu zeigen: $F_{m+1+n} = F_m \cdot F_n + F_{m+1} \cdot F_{n+1}$:

Bei Induktionsschluss wird die Induktionsvoraussetzung auf F_{m-1+n} und auf F_{m+n} angewendet (dies ist erlaubt, weil der Induktionsanfang und der 1. Schritt für zwei aufeinander folgende Zahlen m = 2 und m = 3 gezeigt wurde).

Beweis: $F_{m+1+n} = F_{m-1+n} + F_{m+n} = F_{m-2} \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n+1} + F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}$

$= F_n \cdot (F_{m-2} + F_{m-1}) + F_{n+1} \cdot (F_{m-1} + F_m) = F_n \cdot F_m + F_{n+1} \cdot F_{m+1}$ q.e.d.

E 5 d: $\mathbf{F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2}$ **(für alle $\mathbf{n \geq 1}$)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $F_{2\cdot 1+1} = F_3 = 2$

rechte Seite: $F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Induktionsschluss:

Beim Induktionsschluss wird E 5 c verwendet:

$F_{2n} = F_{n+n} = F_{n-1}\cdot F_n + F_n\cdot F_{n+1}$

Beweis: $F_{2(n+1)+1} = F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n} + 2F_{2n+1}$

$= F_{2n} + 2(F_n^2 + F_{n+1}^2) = F_{n-1}\cdot F_n + F_n\cdot F_{n+1} + 2F_n^2 + 2F_{n+1}^2$

$= F_n\cdot(F_{n-1} + F_n) + F_n\cdot F_{n+1} + F_n^2 + 2F_{n+1}^2 = F_n\cdot F_{n+1} + F_n\cdot F_{n+1} + F_n^2 + 2F_{n+1}^2$

$= F_n^2 + 2F_n\cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n+1})^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$ q.e.d.

E 5 e: $\mathbf{F_{2n+3}^2 = F_n^2 \cdot F_{n+3}^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2}$

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $F_{2\cdot 1+3}^2 = F_5^2 = 5^2 = 25$

rechte Seite: $F_1^2\cdot F_4^2 + 4\cdot F_2^2\cdot F_3^2 = 1^2\cdot 3^2 + 4\cdot 1^2\cdot 2^2 = 25$

Vorüberlegung:
Für den Induktionsschluss werden außer der Induktionsvoraussetzung noch folgende oben bewiesene Aussagen benötigt:

Induktionsvoraussetzung: $F_{2n+3}^2 = F_n^2 \cdot F_{n+3}^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2$

E 5 d: $F_{2n+3} = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$

E 5 c: $F_{2n+4} = F_{(n+2)+(n+2)} = F_{n+1}\cdot F_{n+2} + F_{n+2}\cdot F_{n+3}$

Induktionsschluss:

$F_{2n+5}^2 = (F_{2n+3} + F_{2n+4})^2$

$= F_{2n+3}^2 + 2\cdot F_{2n+3}\cdot F_{2n+4} + F_{2n+4}^2$

$= F_n^2 \cdot F_{n+3}^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 + 2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)(F_{n+1}\cdot F_{n+2} + F_{n+2}\cdot F_{n+3}) + (F_{n+1}\cdot F_{n+2} + F_{n+2}\cdot F_{n+3})^2$

$= (F_{n+2} - F_{n+1})^2\cdot(F_{n+1} + F_{n+2})^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2 + 2F_{n+2}\cdot(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)\cdot(F_{n+1} + F_{n+3})$

$+ F_{n+2}^2\cdot(F_{n+1} + F_{n+3})^2$

$= (F_{n+2} – F_{n+1})^2 \cdot (F_{n+1} + F_{n+2})^2 + 4 \cdot F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 2F_{n+2} \cdot (F_{n+1}{}^2 + F_{n+2}{}^2) \cdot (F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+2})$

$+ F_{n+2}{}^2 \cdot (F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+2})^2$

$= (F_{n+2} – F_{n+1})^2 \cdot (F_{n+1} + F_{n+2})^2 + 4 \cdot F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 2F_{n+2} \cdot (F_{n+1}{}^2 + F_{n+2}{}^2) \cdot (2F_{n+1} + F_{n+2})$

$+ F_{n+2}{}^2 \cdot (2F_{n+1} + F_{n+2})^2$

$= [(F_{n+2} – F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1})]^2 + 4F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 2F_{n+2} \cdot (2F_{n+1}{}^3 + F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2} + 2F_{n+1} \cdot F_{n+2}{}^2 + F_{n+2}{}^3)$

$+ F_{n+2}{}^2 \cdot (4F_{n+1}{}^2 + 4F_{n+1} \cdot F_{n+2} + F_{n+2}{}^2)$

$= [(F_{n+2}{}^2 – F_{n+1}{}^2]^2 + 4F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 2F_{n+2} \cdot (2F_{n+1}{}^3 + F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2} + 2F_{n+1} \cdot F_{n+2}{}^2 + F_{n+2}{}^3)$

$+ F_{n+2}{}^2 \cdot (4F_{n+1}{}^2 + 4F_{n+1} \cdot F_{n+2} + F_{n+2}{}^2)$

$= F_{n+2}{}^4 – 2F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + F_{n+1}{}^4 + 4F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 4F_{n+1}{}^3 \cdot F_{n+2} + 2F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 4F_{n+1} \cdot F_{n+2}{}^3 + 2F_{n+2}{}^4$

$+ 4F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 4F_{n+1} \cdot F_{n+2}{}^3 + F_{n+2}{}^4$

$= F_{n+1}{}^4 + 4F_{n+1}{}^3 \cdot F_{n+2} + 8F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 8F_{n+1} \cdot F_{n+2}{}^3 + 4F_{n+2}{}^4$

$= F_{n+1}{}^4 + 4F_{n+1}{}^3 \cdot F_{n+2} + 4F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 4(F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+2}{}^2 + 2F_{n+1} \cdot F_{n+2}{}^3 + F_{n+2}{}^4)$

$= F_{n+1}{}^2 \cdot (F_{n+1}{}^2 + 4F_{n+1} \cdot F_{n+2} + 4F_{n+2}{}^2) + 4F_{n+2}{}^2 \cdot (F_{n+1}{}^2 + 2F_{n+} \cdot F_{n+2} + F_{n+2}{}^2)$

$= F_{n+1}{}^2 \cdot (F_{n+1} + 2F_{n+2})^2 + 4F_{n+2}{}^2 \cdot (F_{n+1} + F_{n+2})^2$

$= F_{n+1}{}^2 \cdot (F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+2})^2 + 4F_{n+2}{}^2 \cdot (F_{n+3})^2$

$= F_{n+1}{}^2 \cdot (F_{n+3} + F_{n+2})^2 + 4F_{n+2}{}^2 \cdot F_{n+3}{}^2$

$= F_{n+1}{}^2 \cdot F_{n+4}{}^2 + 4F_{n+2}{}^2 \cdot F_{n+3}{}^2$ q.e.d.

E 5 f: $\mathbf{F_n{}^2 + F_n \cdot F_{n+1} – F_{n+1}{}^2 = (-1)^{n+1}}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: linke Seite: $F_1{}^2 + F_1 \cdot F_2 – F_2{}^2 = 1^2 + 1 \cdot 1 – 1^2 = 1$

rechte Seite: $(-1)^{1+1} = 1$

Induktionsschluss:

$F_{n+1}{}^2 + F_{n+1} \cdot F_{n+2} – F_{n+2}{}^2 = F_{n+1}{}^2 + F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) – (F_n + F_{n+1})^2$

$= F_{n+1}{}^2 + F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}{}^2 – F_n{}^2 – 2 \cdot F_n \cdot F_{n+1} – F_{n+1}{}^2$

$= - F_n{}^2 – F_n . F_{n+1} + F_{n+1}{}^2$

$= - (F_n{}^2 + F_n . F_{n+1} – F_{n+1}{}^2) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$ q.e.d.

Rainer Müller, Armin Moritz (Johanneum-Gymnasium Herborn)

F. Ableitungen Lösungen

F 1: $f(x) = e^{ax+b} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}$ **(für alle n ≥ 0)**

Induktionsanfang: n = 0: $f^{(0)}(x) = a^0 \cdot e^{ax+b} = e^{ax+b} = f(x)$

Induktionsschluss:

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = [a^n \cdot e^{ax+b}]' = a \cdot a^n \cdot e^{ax+b} = a^{n+1} \cdot e^{ax+b}$ q.e.d.

F 2: $f(x) = (e^x - t)^2 \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x$ **(für alle n ≥ 1, x ∈ ℜ)**

Induktionsanfang: n = 0: linke Seite: $f^{(1)}(x) = f'(x) = 2 \cdot (e^x - t) \cdot e^x = 2e^{2x} - 2t \cdot e^x$

rechte Seite: $f^{(1)}(x) = 2^1 \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x = 2e^{2x} - 2t \cdot e^x$

Induktionsschluss:

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = [2^n \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x]' = 2^n \cdot 2 \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x = 2^{n+1} \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x$ q.e.d.

F 3: $f(x) = -(x+2) \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (x + 2 - n) \cdot e^{-x}$ **(für alle n ≥ 0)**

Induktionsanfang: n = 0: $f^{(0)}(x) = (-1)^{0-1} \cdot (x + 2 - 0) \cdot e^{-x} = -(x+2) \cdot e^{-x} = f(x)$

Induktionsschluss:

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = [(-1)^{n-1} \cdot (x + 2 - n) \cdot e^{-x}]' = (-1)^{n-1} \cdot [1 \cdot e^{-x} + (x + 2 - n) \cdot e^{-x} \cdot (-1)]$

$= (-1)^{n-1} \cdot [-(-1) \cdot e^{-x} - (x + 2 - n) \cdot e^{-x}] = (-1)^{n-1} \cdot [-(x + 2 - 1 - n) \cdot e^{-x}]$

$= (-1)^{n-1} \cdot [-(x + 2 - (n + 1)) \cdot e^{-x}] = (-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot [(x + 2 - (n + 1)) \cdot e^{-x}]$

$= (-1)^n \cdot [(x + 2 - (n + 1)) \cdot e^{-x}]$ q.e.d.

F 4: $\mathbf{f(x) = x^2 \cdot e^x}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n-1)] \cdot e^x}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: linke Seite: $f^{(1)}(x) = f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

rechte Seite: $f^{(1)}(x) = [x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1(1-1)] \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

<u>Induktionsschluss:</u>

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = \{[x^2 + 2nx + n(n-1)] \cdot e^x\}' = [2x + 2n] \cdot e^x + [x^2 + 2nx + n(n-1)] \cdot e^x$

$= [2x + 2n + x^2 + 2nx + n^2 – n] \cdot e^x = [x^2 + 2x(n+1) + n^2 + n] \cdot e^x$

$= [x^2 + 2x(n+1) + (n+1) \cdot n] \cdot e^x$ q.e.d.

F 5: $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^n}}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1:

linke Seite: $f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$

rechte Seite: $f^{(1)}(x) = (-1)^{1-1} \cdot (1-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^1} + (1-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^1} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+x} + 1 \cdot \frac{1}{1-x}$

$= \frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = [(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^n}]'$

$= [(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} + (n-1)! \cdot (1-x)^{-n}]'$

$= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-n) \cdot (1+x)^{-n-1} + (n-1)! \cdot (-n) \cdot (1-x)^{-n-1} \cdot (-1)$

$= (-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot (n-1)! \cdot n \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}} + (n-1)! \cdot n \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$

$= (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}} + n! \cdot \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ q.e.d.

F 6: $f_n(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f_n'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: $f_1(x) = x^{-1}$

$$\Rightarrow f_1'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x \cdot (x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x \cdot (x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x \cdot (x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-1-1}$$

Induktionsschluss:

$f_{n+1}(x) = x^{-(n+1)} = x^{-n-1} = x^{-1} \cdot x^{-n}$

Mit Hilfe der Produktregel, des Induktionsanfangs und der Induktionsvoraussetzung folgt:

$f_{n+1}'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot x^{-n} + x^{-1} \cdot (-n \cdot x^{-n-1}) = -x^{n-2} - n \cdot x^{n-2} = -(n+1) \cdot x^{-n-2}$ q.e.d.

F 7: $f(x) = \frac{1}{ax+b} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ **(für alle n ≥ 0)**

Induktionsanfang: n = 0: $f^{(0)}(x) = (-1)^0 \cdot \frac{a^0 \cdot 0!}{(ax+b)^{0+1}} = \frac{1}{ax+b} = f(x)$

Induktionsschluss:

$$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = \left[(-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}\right]' = (-1)^n \cdot a^n \cdot n! \cdot [(ax+b)^{-n-1}]'$$

$$= (-1)^n \cdot a^n \cdot n! \cdot (-n-1) \cdot (ax+b)^{-n-2} \cdot a = (-1)^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (ax+b)^{-n-2}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(ax+b)^{n+2}}$$ q.e.d.

F 8: $f(x) = \frac{x}{2-x}$ $\Rightarrow$ $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot 2\cdot n!\cdot \frac{1}{(x-2)^{n+1}}$ **(für alle n ≥ 1)**

Induktionsanfang: n = 1: $f(x) = \frac{x}{2-x} = -\frac{x}{x-2} = -\frac{x-2+2}{x-2} = -1 - \frac{2}{x-2} = -1 - 2\cdot(x-2)^{-1}$

$\Rightarrow f'(x) = -2\cdot(x-2)^{-2}\cdot(-1) = (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot 1!\cdot \frac{1}{(x-2)^{1+1}}$

Induktionsschluss:

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]' = \left[(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot n!\cdot (x-2)^{-n-1}\right]' = (-1)^{n+1}\cdot 2\cdot n!\cdot(-n-1)\cdot(x-2)^{-n-2}\cdot 1$

$= (-1)^{n+2}\cdot 2\cdot n!\cdot(n+1)\cdot(x-2)^{-n-2} = (-1)^{n+2}\cdot 2\cdot(n+1)!\cdot \frac{1}{(x-2)^{n+2}}$ q.e.d.

F 9: $f(x) = \sinh(a\cdot x)$ $\Rightarrow$ $f^{(2n)}(x) = a^{2n}\cdot\sinh(a\cdot x)$ **(für alle n ≥ 1)**

Hinweis: $\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

Induktionsanfang: n = 0: $f^{(2\cdot 0)}(x) = a^{2\cdot 0}\cdot\sinh(a\cdot x) = \sinh(a\cdot x) = f(x)$

Induktionsschluss:

$f^{(2n+2)}(x) = [f^{2n}(x)]'' = [a^{2n}\cdot\sinh(ax)]'' = a^{2n}\cdot[\sinh(ax)]'' = a^{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot[e^{ax} - e^{-ax}]''$

$= a^{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot[a\cdot e^{ax} + a\cdot e^{-ax}]' = a^{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot[a^2\cdot e^{ax} - a^2\cdot e^{-ax}] = a^{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot[e^{ax} - e^{-ax}]$

$= a^{2n+2}\cdot\sinh(ax)$ q.e.d.

F 10: $f(x) = \sin(a\cdot x)$ $\Rightarrow$ $f^{(2n)}(x) = (-1)^n\cdot a^{2n}\cdot\sin(a\cdot x)$ **(für alle n ≥ 0)**

Induktionsanfang: n = 0: $f^{(2\cdot 0)}(x) = (-1)^0\cdot a^{2\cdot 0}\cdot\sin(ax) = \sin(ax) = f(x)$

Induktionsschluss:

$f^{(2n+2)}(x) = [f^{2n}(x)]'' = [(-1)^n\cdot a^{2n}\cdot\sin(ax)]'' = [(-1)^n\cdot a^{2n}\cdot a\cdot\cos(ax)]' = (-1)^n\cdot a^{2n}\cdot a^2\cdot[-\sin(ax)]$

$= (-1)^{n+1}\cdot a^{2n+2}\cdot\sin(ax)$ q.e.d.

Rainer Müller, Armin Moritz (Johanneum-Gymnasium Herborn)

G. Sonstiges Lösungen

G 1: n Elemente kann man auf n! verschiedene Arten anordnen.

Induktionsanfang: n = 1: 1 Element lässt sich auf eine Art anordnen: 1 = 1!

Induktionsschluss:

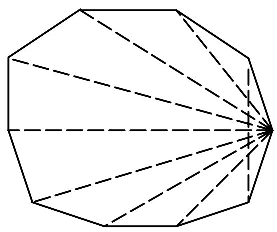
Gegeben seinen die Elemente e_1 bis e_n. Diese lassen sich nach Induktionsvoraussetzung auf n! Arten anordnen. Nun kommt ein neues Element e_{n+1} hinzu. Für die (n+1) Elemente stehen (n+1) Plätze zur Verfügung. Das Element e_{n+1} kann zunächst auf irgendeines dieser (n+1) Plätze gesetzt werden. Für die restlichen Elemente e_1 bis e_n stehen nun noch jeweils n Plätze zur Verfügung. Dafür gibt es nach Induktionsvoraussetzung n! Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also für alle Elemente e_1 bis e_{n+1} $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$ Möglichkeiten. q.e.d.

G 2: In einem konvexen n-Eck (mit $n \geq 3$) gibt es $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Induktionsanfang: n = 3: In einem Dreieck gibt es keine Diagonalen.

Es ist $\frac{3\cdot(3-3)}{2} = 0$

Induktionsschluss:



Nach Induktionsvoraussetzung können in einem konvexen Vieleck mit n Ecken insgesamt $0{,}5\cdot n(n-3)$ Diagonalen gezeichnet werden. Ein konvexes Vieleck mit (n+1) Ecken entsteht aus einem konvexen Vieleck mit n Ecken, indem eine zusätzliche Ecke hinzukommt. Diese zusätzliche Ecke kann mit allen Ecken des konvexen (n+1)-Ecks mit einer Diagonalen verbunden werden, ausgenommen mit sich selber und mit den beiden Nachbarecken, d. h. es können von dieser neuen Ecke aus (n+1) – 3 neue Diagonalen gezeichnet werden. Außerdem können die beiden Nachbarecken dieser neuen Ecke erstmals durch eine Diagonale verbunden werden, d. h. es kommt noch eine Diagonale hinzu. Zu den schon vor vorhandenen $0{,}5\cdot n(n-3)$ kommen also noch einmal $(n+1) - 3 + 1 = n - 1$ neue Diagonalen hinzu, also insgesamt $0{,}5\cdot n(n-3) + n - 1 = 0{,}5\cdot(n^2 - 3n + 2n - 2)$

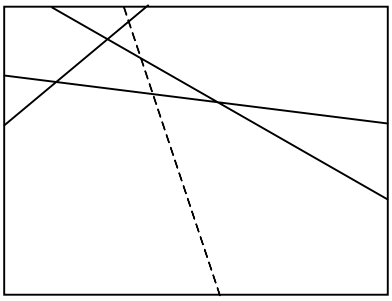
$= 0{,}5\cdot(n^2 - n - 2) = 0{,}5\cdot(n+1)(n-2) = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)-3]}{2}$ q.e.d.

G 3: Eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Gebiete.

n Geraden können die Ebene höchstens in $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen.

Indunktionsanfang: n = 0: Keine Gerade, d. h. das Gebiet wird nicht zerteilt, also verbleibt 1 Gebiet und es ist: $\frac{0^2+0+2}{2} = 1$

Induktionsschluss:



Nach Induktionsvorausetzung können n Geraden ein Gebiet in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ zerlegen.
Eine neu hinzukommende (n+1)-te Gerade kann jede der bisher vorhandenen n Geraden höchstens einmal schneiden.
Dabei verläuft diese neue Gerade durch maximal (n+1) Gebiete, die dann durch die neue Gerade in jeweils 2 Teilgebiete aufgeteilt werden, d. h. es kommen maximal (n+1) neue Gebiete hinzu.

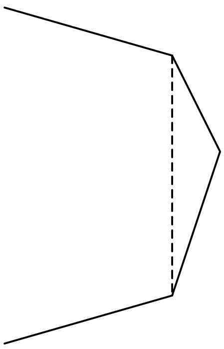
Maximalzahl aller Gebiete bei (n+1) Geraden: $\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2}$

$= \frac{n^2+3n+4}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$ q.e.d.

G 4: Die Winkelsumme der Innenwinkel in einem konvexen n-Eck (mit n $\geq$ 3) beträgt (n-2)·180°.

Induktionsanfang: n = 3: Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck beträgt bekanntermaßen 180° = (3 – 2)·180°.

Induktionsschluss:
Sei nun ein Dreieck gegeben mit (n+1) Ecken. Betrachten zunächst ein Dreieck mit n Ecken, welches entsteht, wenn aus dem Dreieck mit (n+1) Ecken eine Ecke übersprungen wird:



Für das Dreieck mit n Ecken beträgt die Summe der Innenwinkel nach Induktionsvoraussetzung (n – 2)·180°.
Die Summe der Innenwinkel im Dreieck mit (n+1) Ecken müssen zur bisherigen Summe der Innenwinkel lediglich noch die drei Innenwinkel des neuen Dreiecks hinzugefügt werden, also 180°.

Gesamtsumme aller Innenwinkel im Dreieck mit (n+1) Ecken:

(n – 2)·180° + 180° = (n – 1)·180° q.e.d.

G 5: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge ($n \geq 0$) enthält 2^n Elemente.

Induktionsanfang: $n = 0$: Eine Menge mit 0 Elementen kann nur die leere Menge { } sein. Die Potenzmenge der leeren Menge P({ }) enthält nur eine einzige Menge, nämlich die leere Menge: P({ }) = { { } }, d. h. sie enthält genau ein Element: $1 = 2^0$.

Induktionsschluss:

Sei M_{n+1} eine Menge mit (n+1) Elementen $e_1; \ldots; e_{n+1}$. Betrachte dazu die Teilmenge M_n mit den Elementen $e_1; \ldots; e_n$. Die Potenzmenge $P(M_n)$ dieser Teilmenge enthält nach Induktionsvoraussetzung genau 2^n Elemente, diese seien mit $T(1); \ldots; T(2^n)$ bezeichnet, d. h. $P(M_n) = \{T(1); \ldots; T(2^n)\}$.
Um die Potenzmenge von M_{n+1}, also alle möglichen Teilmengen von M_{n+1} zu erhalten, kann die Potenzmenge von $P(M_n)$ verwendet werden, denn diese ist eine Teilmenge von $P(M_{n+1})$. Dazu kommen noch alle möglichen Teilmengen, die auch das Element e_{n+1} enthalten. Diese erhält man dadurch, indem jedes Element von $P(M_n)$ mit dem Element e_{n+1} vereinigt wird: $T(1) \cup \{e_{n+1}\}; \ldots; T(2^n) \cup \{e_{n+1}\}$.
$\Rightarrow \quad P(M_{n+1}) = \{T(1); \ldots; T(2^n); T(1) \cup \{e_{n+1}\}; \ldots; T(2^n) \cup \{e_{n+1}\} \}$.
Die Anzahl der Elemente von $P(M_{n+1})$ beträgt daher $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. q.e.d.

G 6: Schubfachprinzip: Werden n Objekte in k Fächer gegeben (mit $k < n$), dann enthält mindestens eines der k Fächer mehr als ein Objekt.

Die n Objekte werden nun nacheinander auf die k Fächer verteilt, wobei in jedem Schritt auf die Behauptung geachtet wird.

Induktionsvoraussetzung: Der erste Objekt wird in ein beliebiges Fach gelegt, damit ist ein Fach belegt. Für das zweite Objekt gibt es nun zwei Möglichkeiten. Wird es in das bereits mit einem Objekt belegte Fach gelegt, dann ist die Behauptung bereits erfüllt. Wird das zweite Objekt allerdings in ein noch leeres Fach gelegt, sind damit zwei Fächer mit jeweils einem Objekt belegt.

Induktionsschluss:

Nach Induktionsvoraussetzung seien nun m ($m < k$) Fächer mit jeweils einem Objekt belegt. Für das (m+1)-te Objekt gibt es nun zwei Möglichkeiten. Wird es in ein Fach gelegt, dass bereits mit einem Objekt belegt ist, dann ist die Behauptung erfüllt. Wird das (m+1)-te Objekt allerdings in ein noch leeres Fach gelegt, sind damit (m+1) der k Fächer mit jeweils einem Objekt belegt.
Dieses Verfahren wird fortgeführt bis $m = k$. Nun sind alle k Fächer mit jeweils einem Objekt belegt. Da aber $n > k$, gibt es noch Objekte, die verteilt werden müssen. Das (k+1)-te Objekt muss nun in irgendeines der k Fächer gelegt werden. Da aber jedes dieser Fächer bereits mit einem Objekt belegt ist, besitzt dieses nun gewählte Fach genau zwei Objekte. Damit ist die Behauptung bewiesen.

G 7: Kleiner Satz von Fermat:
Für eine Primzahl p und einer natürlichen Zahl n
mit ggT(n,p) = 1 gilt p $\mid$ n^{p-1}- 1

Beweise zunächst folgende Beziehung:

G6* Für eine beliebige Primzahl p gilt: p$\mid$(n^p – n) für jede natürliche Zahl n $\geq$ 1

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: n = 1: $1^p - 1 = 0$ und für jede Primzahl p ist $p \mid 0 = 1^p - 1$

Induktionsschluss:

zu zeigen: $p \mid [(n+1)^p - (n+1)]$

Beweis:

Es ist $(n+1)^p - (n+1) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k 1^{n-k}$ - (n+1) = $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + \binom{p}{0} n^0 + \binom{p}{p} n^p - n - 1$

$= n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $p \mid (n^p - n)$

Die Binomialkoeffizienten sind bekanntlich immer natürliche Zahlen: $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!}$

Der Zähler enthält p als Faktor. Da p eine Primzahl ist, die größer als k und als (p-k) ist für alle Summanden der Summe, kann p nicht weggekürzt werden.

Daher ist $p \mid \binom{p}{k}$ und damit auch $p \mid \binom{p}{k} n^k$ für jeden Summanden der Summe.

Weil nun $p \mid (n^p - n)$ und $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$, ist p auch ein Teiler der Summe beider Ausdrücke,

d. h. $p \mid n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$, also $p \mid [(n+1)^p - (n+1)]$ q.e.d.

Beweis des kleinen Satzes von Fermat:

Es ist $(n^p - n) = n \cdot (n^{p-1} - 1)$. Nach Satz G 6* ist $p \mid n^p - n$ und da p eine Primzahl ist,

gilt $p \mid n \vee p \mid (n^{p-1} - 1)$

Da nach Vor. ggT(n,p) = 1 $\Rightarrow$ $p \mid (n^{p-1} - 1)$ q.e.d.

G 8: Für folgende Zahl im Zweiersystem gilt:

$1010\ldots1010_{(2)} = \frac{2\cdot(4^n-1)}{3}$, wobei die Zifferngruppe „10“ im Zweiersystem n-mal hintereinander vorkommen soll.

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $10_{(2)} = 2^1 + 2^0 = 2 = \frac{2\cdot(4^1-1)}{3}$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$\underbrace{10101010\ldots1010}_{(n+1)\cdot\text{“10“}}{}_{(2)} = 1010\ldots\underbrace{0}_{2n\cdot\text{“0“}}{}_{(2)} + \underbrace{1010\ldots1010}_{n\cdot\text{“10“}}{}_{(2)} = 2^{2n+1} + \frac{2\cdot(4^n-1)}{3}$$

$$= 2\cdot4^n + \frac{2}{3}\cdot4^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\cdot[3\cdot4^n + 4^n - 1] = \frac{2}{3}\cdot(4\cdot4^n - 1)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(4^{n+1} - 1) \qquad \text{q.e.d.}$$

G 9: Für die Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **gilt:** $A^n = \underbrace{A\bullet A\bullet\ldots\bullet A}_{\text{n-Stück}} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(für alle n ≥ 1)**

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1\cdot(1-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{2n}{2}+\frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{q.e.d.}$$

G 10: Für die Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **gilt:**

$$\mathbf{A^n = \underbrace{A \bullet A \bullet \ldots \bullet A}_{\text{n-Stück}} =} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(für alle n} \geq \textbf{1)}$$

Induktionsanfang: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^1}{2} & \frac{1-(-1)^1}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^1}{2} & \frac{1+(-1)^1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

Induktionsschluss:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{q.e.d.}$$

G 11: Für die Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **gilt:**

$$\mathbf{A^n = \underbrace{A \bullet A \bullet \ldots \bullet A}_{n\text{-Stück}} = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot A} \qquad \textbf{(für alle } \mathbf{n \geq 1)}$$

<u>Induktionsanfang:</u> n = 1: $A^1 = 3^{1-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$

<u>Induktionsschluss:</u>

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^n \cdot A \qquad \text{q.e.d.}$$

G 12:

Induktions-Anfang: $n = 1: \; x_1 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 \geq 1$

Induktions-Schritt:

Es gelte die Induktions-Voraussetzung:
Sind n Zahlen $x_i > 0$ $[i = 1; 2; ..., ; n]$ gegeben mit $x_1 \cdot \,...\, \cdot x_n = 1$

$$\Rightarrow \; x_1 + \,...\, + x_n \geq n$$

Zu zeigen:
Sind $n+1$ Zahlen $x_i > 0$ $[i = 1; 2; \ldots; n; n+1]$ gegeben mit $x_1 \cdot \,...\, \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$

$$\Rightarrow \; x_1 + \,...\, + x_n + x_{n+1} \geq n + 1$$

Beweis:

Für $n+1$ Zahlen mit $x_i > 0$ $[i = 1; 2; \ldots; n; n+1]$ gelte $x_1 \cdot \,...\, \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$.
Die Zahlen x_i seien der Größe nach angeordnet, also $x_1 \leq x_2 \leq \,...\, \leq x_n \leq x_{n+1}$.
Dann gilt $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$ (sonst wäre das Produkt der Zahlen nicht 1).
Anders geordnet gilt $(x_1 \cdot x_{n+1}) \cdot x_2 \cdot \,...\, \cdot x_n = 1$.
Nach Induktions-Voraussetzung gilt für dieses Produkt aus n Zahlen, dass für die Summe dieser n Zahlen gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
x_1 \cdot x_{n+1} + x_2 + \,...\, + x_n & \geq & n & \quad | - x_1 \cdot x_{n+1} \\
\Rightarrow & & & \\
x_2 + \,...\, + x_n & \geq & n - x_1 \cdot x_{n+1} & \quad | + x_1 + x_{n+1} \\
\Rightarrow & & & \\
x_1 + x_2 + \,...\, + x_n + x_{n+1} & \geq & n + x_1 + x_{n+1} - x_1 \cdot x_{n+1} & \\
& \geq & n + x_1 \cdot (1 - x_{n+1}) + x_{n+1} \underbrace{-1 + 1}_{=0} & \\
& \geq & n + \underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1 - x_1)}_{\geq 0} + 1 & \\
& \geq & n + 1 &
\end{array}
$$