



Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen

Profilfach Mathematik

Thema: Die e-Funktion

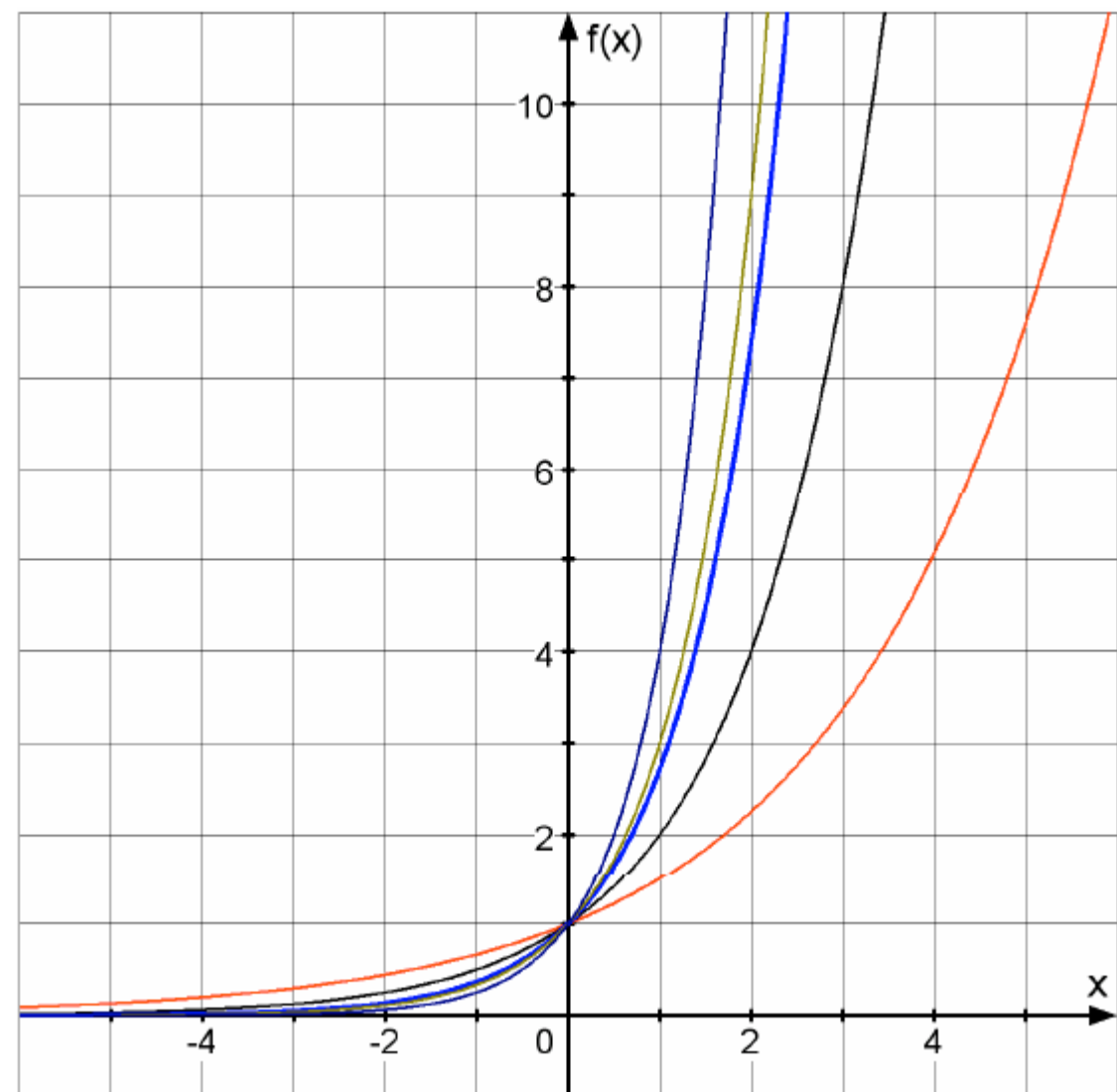
Verfasser: Andrea Wendelgaß

Kurslehrer: Frau Schützner

Inhaltsverzeichnis / Gliederung

	Seite
Deckblatt	1
Inhaltsverzeichnis / Gliederung	2
1. Allgemeine Eigenschaften der Funktion $f(x) = a^x$	3
- Schaubild	4
- Beobachtungen am Schaubild	
2. Herleitung der Funktion $f(x) = e^x$	5
2.1 Berechnung der Ableitungsfunktion $f'(x) = e^x$	
- Aufstellen der Sekantensteigungsfunktion : $\Delta y/\Delta x$ in einem beliebigen Punkt $P \in f(x)$	
- Formel zur Berechnung der Tangentensteigung in P ermitteln	6
2.1.1 Graphische Annäherung an e	
- Die Eulersche Zahl e	
3. Berechnung der Eulerschen Zahl e	7
- Schaubild der Funktion : $f(x) = e^x$	
- Tangente im markantem Punkt $S(0 1)$	
- Intervallschachtelung mit zwei Folgen zur Eingrenzung von e	8
- Beweis der Folgeigenschaften : streng monoton wachsend und begrenzt	9
- Grenzwert der beiden unterschiedlichen Zahlenfolgen ist e	11
- Bestimmung von e durch Intervallschachtelung	
- Weitere Berechnungsmöglichkeit für die eulersche Zahl e	
4. Wesentliche Funktionseigenschaften von $f(x) = e^x$	12
- Schaubild der Funktion $f(x) = e^x$	
- Wichtige Funktionswerte, Grenzwerte, Nullstellen, Wertemenge, 1. und 2. Ableitung	
5. Quellenverzeichnis	
5.1. (Lehr)bücher	
5.2. Internetadressen	

Schaubilder der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$; $a \neq 1, a > 0$



Von rechts nach links zeigt das Schaubild die Kurven folgender Exponentialfunktionen :

$f(x) = a^x$ mit $a = 1,5$; $a = 2$; $a = e (\approx 2,71828)$; $a = 3$; $a = 4$

- ▶ Nur für $a > 0$, weil für $a < 0$ der Ausdruck a^x für $x \in \mathbb{R}$ nicht definiert wäre
- denn sonst wäre für $a = -2$ und $x = \frac{1}{2}$, $a^x = -2^{1/2} = \sqrt{-2}$ und dies ist nicht erlaubt !

- ▶ Man betrachtet nur $a > 1$, weil die Funktionen mit $0 < a < 1$ nur die Spiegelungen der jeweiligen Kehrwertfunktion an der y -Achse sind

Es gilt $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ und für $0 < a < 1$ und $a = \frac{1}{b}$ folgt $b = \frac{1}{a} > 1$.

Dann gilt $a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x} \Rightarrow$ das Schaubild von $y = a^x$ ist die Spiegelung des Schaubilds von $y = b^x$ an der y -Achse ($b > 1$).

Zahlenbeispiel : $a = \frac{1}{2}$, daraus folgt $b = \frac{1}{a} = 2 > 1$

$$a^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{(-x)} \Rightarrow \text{Spiegelung an der y-Achse}$$

Beobachtungen am Schaubild :

1. Alle dargestellten Exponentialfunktionen haben den Punkt **S(0 | 1)** als Schnittpunkt mit der y-Achse. Man nennt **S den markanten Punkt** dieser Kurven.

2. Die negative x – Achse ist die waagrechte Asymptote für $a > 1$
(für $a < 1$ ist die positive x – Achse waagrechte Asymptote)

Für $a > 1$ gilt: $x \rightarrow \infty$ folgt $a^x \rightarrow +\infty$;

$$x \rightarrow -\infty \text{ folgt } a^x \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x \rightarrow \infty \text{ folgt } \frac{1}{a^{-x}} \rightarrow 0$$

oder anders dargestellt :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{-x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{-x}}$$

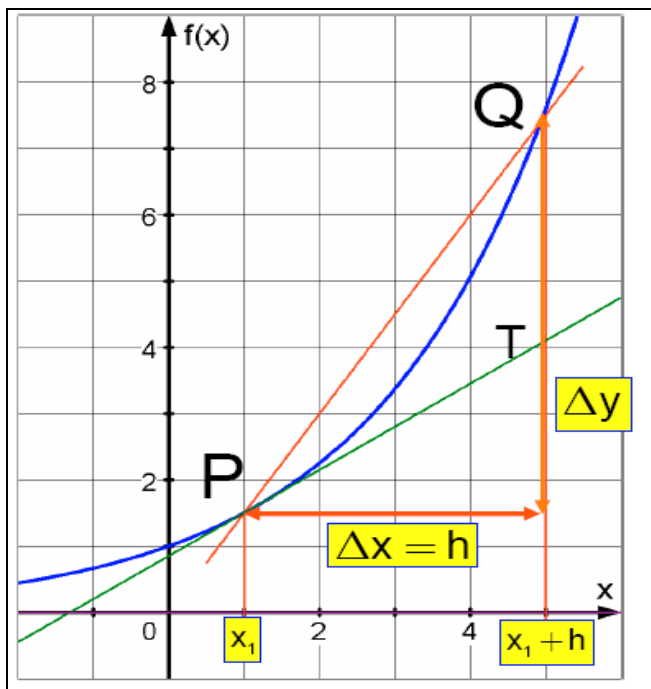
3. Keines dieser Schaubilder schneidet oder berührt die x – Achse. Dies gründet in unserer Bedingung $a > 0$; somit sind nämlich auch alle Funktionswerte $a^x > 0$
→ es gibt keine Nullstellen und der Wertebereich dieser Funktionen sind die positiven reellen Zahlen.

4. Alle Exponentialfunktionen mit $a > 1$ sind streng monoton wachsend und linksgekrümmt.

2. Herleitung der Funktion $f(x) = e^x$

2.1 Berechnung der Ableitungsfunktion $f'(x) = e^x$

- ▶ Mit Hilfe des Differenzialquotienten bildet man aus der Sekantensteigungsfunktion die Tangentensteigungsfunktion und berechnet die Tangentensteigung an einer Stelle x_1 :



- ▶ $P(x_1 | a^{x_1})$ sei der Punkt, indem wir die Tangentensteigung bestimmen wollen.
- ▶ Durch $P(x_1 | a^{x_1})$ und einen zweiten Punkt $Q(x_1 + h | a^{x_1+h})$, $Q \in f(x) = a^x$, wird zunächst eine Sekante gelegt.
- ▶ Durch die Bedingung $h \neq 0$ gilt $P \neq Q$. Somit ist die Steigung der Sekante PQ berechenbar; aufgrund der Abhängigkeit der Sekante PQ von h erhalten wir die **Sekantensteigungsfunktion**:

$$m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x_1+h} - a^{x_1}}{h}$$

$$m_s(h) = \frac{a^{x_1} a^h - a^{x_1}}{h} = a^{x_1} \frac{a^h - 1}{h}$$

- ▶ Lässt man h gegen 0 laufen, bedeutet das, dass P gegen Q läuft; durch diesen Prozess wird aus der Sekante PQ die Tangente in P.
- ▶ Der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion für h gegen 0 bildet die Tangentensteigung

$$m_T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} m_s(h) = \lim_{h \rightarrow 0} a^{x_1} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

- Für die Ableitung an der Stelle x_1 verwenden wir die gebräuchliche Schreibweise:

$$(I) \quad f'(x_1) = a^{x_1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

- Da alle Exponentialfunktionen den selben markanten Punkt $S(0|1)$ vorweisen können untersucht man zuerst die Tangentensteigung an der Stelle $x_1 = 0$

$$f'(0) = a^0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

- Der Grenzwert auf der rechten Seite der Gleichung (I) ist also identisch mit dem Ableitungswert $f'(0)$; setzt man diese Tatsache ein, dann erhält man

$$(II) \quad f'(x_1) = a^{x_1} \cdot f'(0)$$

- Mit dieser Gleichung kann man die Tangentensteigung in jedem beliebigen Punkt x_1 berechnen, unter der Voraussetzung, dass der Wert $f'(0)$ bekannt ist.

Allgemein, ohne Index 1, lautet (II) :

$$(III) \quad f'(x) = f'(0) \cdot a^x$$

2.1.1 Graphische Annäherung an e

- Der schweizer Mathematiker Johannes Euler kam nun auf die Idee, die Zahl e zu bestimmen, deren Funktion $f(x) = e^x$ bei $x = 0$ den Ableitungswert $f'(0) = 1$ annimmt; dies wäre dann die einfachste Art, die Gleichung (III) $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$ zu berechnen.
- Hierzu gehen wir erst einmal experimentell vor:
⇒ Abbildung 1 zeigt 5 verschiedene Schaubilder; sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt $S(0|1)$, hier kann man die Tangente einzeichnen und die Steigung abmessen.

Hat man exakt gearbeitet, dann erhält man folgende Werte:

für $a = 1,5$	gilt $f(x) = 1,5^x$; $m_T = 0,405$	und somit $f'(x) = 0,405 \cdot 1,5^x$
für $a = 2$	gilt $f(x) = 2^x$; $m_T = 0,693$	und somit $f'(x) = 0,693 \cdot 2^x$
für $a = 3$	gilt $f(x) = 3^x$; $m_T = 1,099$	und somit $f'(x) = 1,099 \cdot 3^x$
für $a = 4$	gilt $f(x) = 4^x$; $m_T = 1,382$	und somit $f'(x) = 1,382 \cdot 4^x$

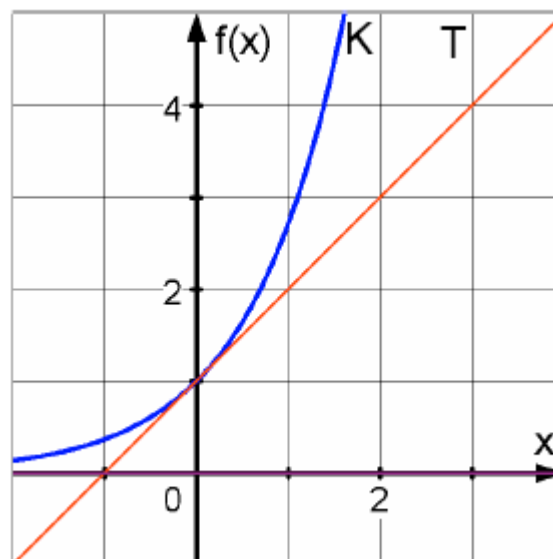
⇒ die Kurve der Funktion $f(x) = e^x$ wurde bisher weggelassen, da e diejenige Zahl (Basis) sein soll, deren Funktion $f(x) = e^x$ bei $x = 0$ den Ableitungswert 1 hat!

► Gemäß der Gleichung (III) $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$ bedeutet $f'(0) = 1$, für $f(x) = e^x$:

zu $f(x) = e^x$ gehört $f'(x) = e^x$

3. Berechnung der Eulerschen Zahl e

3.1 Berechnung der Eulerschen Zahl mit Hilfe einer Intervallschachtelung



► Die Funktion $f(x) = e^x$ hat das Schaubild $y = e^x$; die Tangentensteigung in $S(0|1)$ ist 1. Mit Hilfe des somit bekannten Achsenabschnitts 1 kann man die **Tangentengleichung** in S aufstellen :

$$T : y = x + 1$$

- Rein mit Variablen weiß man nun : weil $f(x) = e^x$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = e^x$ hat, ist ihre Ableitung $f''(x) = e^x$ ebenfalls bekannt.

Zudem weiß man, dass die Ableitungen von $f(x) = e^x$ stets positive Werte haben werden,

denn $e^0 = 1$, somit $e^x > 0 \Rightarrow f(x) = e^x > 0$

$$f'(x) = e^x > 0 \rightarrow \text{somit ist } f(x) = e^x \text{ streng monoton wachsend}$$

$$f''(x) = e^x > 0 \rightarrow \text{somit ist } f(x) = e^x \text{ links gekrümmt.}$$

- Also liegt das Schaubild K links und rechts vom Berührungspunkt $S(0|1)$ oberhalb der Tangente, d.h., für alle x aus \mathbb{R} gilt :

$$(IV) \quad e^x \geq x + 1$$

Mit Hilfe von zwei unterschiedlichen Zahlenfolgen, deren Grenzwert jeweils 0 ist, und der Ungleichung (IV) führt man nun eine Intervallschachtelung durch.

Hierbei setzt man anstatt x die jeweilige Zahlenfolge ein:

1. Schritt : Zahlenfolge $x = a_n = \frac{1}{n}$ in (IV) einsetzen:

$$e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1 \quad | ()^n$$

$$\left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n \geq \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n$$

$$(V) \quad e \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

2. Schritt : Zahlenfolge $x = b_n = -\frac{1}{n+1}$ in IV einsetzen

$$e^{-\frac{1}{n+1}} \geq -\frac{1}{n+1} + 1$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}} \geq \frac{n+1-1}{n+1}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}} \geq \frac{n}{n+1} \quad \rightarrow \text{auf jeder Seite den Kehrwert bilden}$$

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} \quad | ()^{n+1}$$

$$\left(e^{\frac{1}{n+1}} \right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1}$$

$$(VI) \quad e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

► Schreibt man (V) und (VI) nebeneinander, dann entsteht eine Doppelungleichung :

$$e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{d.h.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad \text{und} \quad e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \text{(VII)} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

► Man kann nun beweisen, dass die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ streng monoton wächst, d.h. mit jeder weiteren Nummer n wird die in (VIII) links stehende Zahl größer, und man kann beweisen, dass die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ beschränkt ist.}$$

Aus der Monotonie und der Beschränktheit folgt, dass

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ einen Grenzwert besitzt.}$$

Nach (VII) muss dann gelten:

Diejenige Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, die bei $x = 0$ den Ableitungswert $f'(0) = 1$ hat und für die $f'(x) = f(x)$ gilt, hat die Basis

$$a = e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{1)} \quad = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

► Man schätzt ab, dass alle vorkommenden Faktoren kleiner als 1 sind.

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

- ▶ Erneutes Abschätzen mit 2-er Potenzen: die Fakultät $n!$ einer Zahl n ist stets mindestens so groß wie die 2-er Potenz mit Exponent $n-1$.
→ wenn die Fakultät im Nenner steht, ist der „Fakultätsbruch“ immer $<$ „Potenzbruch“

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ für } n > 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ ist beschränkt !}$$

Folgerung für $n \rightarrow (n+1)$:

$$2) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

- ▶ Vergleicht man 1) mit 2), dann stellt man fest, dass bei der Summe in 1) in jeder der Klammern mehr von 1 abgezogen wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ als bei der Summe in 2): $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

- ▶ Daraus folgt $2) \geq 1)$

da bei 2) noch ein weiterer Summand existiert $\left(\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\right)$

gilt sogar sicher $2) > 1)$.

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n, \text{ also ist die Folge } (a_n) \text{ streng monoton wachsend.}$$

- ▶ Folgen, die streng monoton wachsend sind und nach oben begrenzt sind, sind konvergent, d.h., diese Folgen besitzen einen Grenzwert.

- Dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ links von e den selben Grenzwert g hat, wie die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ rechts von e , lässt sich mit den Potenzgesetzen zeigen.
Bildet man nun den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$, dann folgt :

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = g$$

- Da die beiden Folgen den selben Grenzwert g haben und e durch die Intervallschachtelung zwischen ihnen liegt, muss $g = e$ der Grenzwert sein.
- Jeder Nummer n lässt sich ein spezielles Intervall zuordnen; jedes nächste Intervall ist kleiner als das vorherige.

► $n = 1$	2	$< e <$	4
$n = 5$	2,488430	$< e <$	2,985984
$n = 10$	2,593742	$< e <$	2,853116
$n = 50$	2,691588	$< e <$	2,745479
$n = 100$	2,704813	$< e <$	2,731861
$n = 1000$	2,716942	$< e <$	2,719641
$n = 10000$	2,718141	$< e <$	2,718413

⇒ also muss gelten $e \approx 2,718$

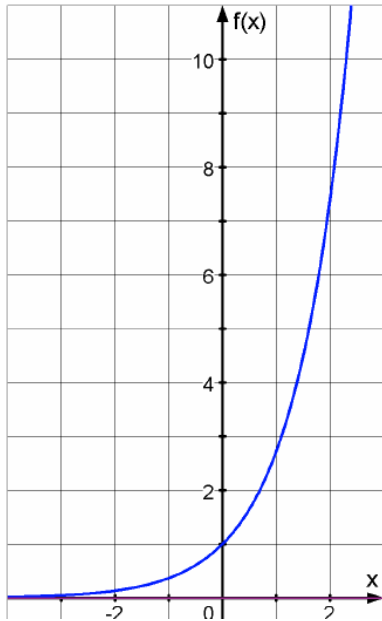
Bemerkung: man kann sogar zeigen, dass gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} < e$$

Dadurch ergibt sich eine weitere Berechnungsmöglichkeit für e mittels

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

4. Wesentliche Funktionseigenschaften von $f(x) = e^x$



► Wichtige Funktionswerte : $f(0) = 1$

$$f(1) = e \approx 2,718$$

$$f(2) = e^2 \approx 7,4$$

$$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$$

$$f(-2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,14$$

► Randwerte/Grenzwerte : $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) = e^x \rightarrow \infty$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = e^x \rightarrow 0$$

d.h die negative x-Achse ist
waagrechte Asymptote

► Wertemenge : $W = \mathbb{R}^+$

► Da für alle x aus \mathbb{R} gilt: $f(x) = e^x > 0$, besitzt f keine Nullstellen.

► Ableitungen : $f'(x) = e^x > 0$ d.h. f steigt streng monoton und hat keine Extremwerte.

$f''(x) = e^x > 0$ d.h. das Schaubild K von f ist immer linksgekrümmt und besitzt keine Wendepunkte.