Friedrich-Schiller-Gymnasium
Ludwigsburg
Jahrgangsstufe 13

Gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen

Profilfach Mathematik

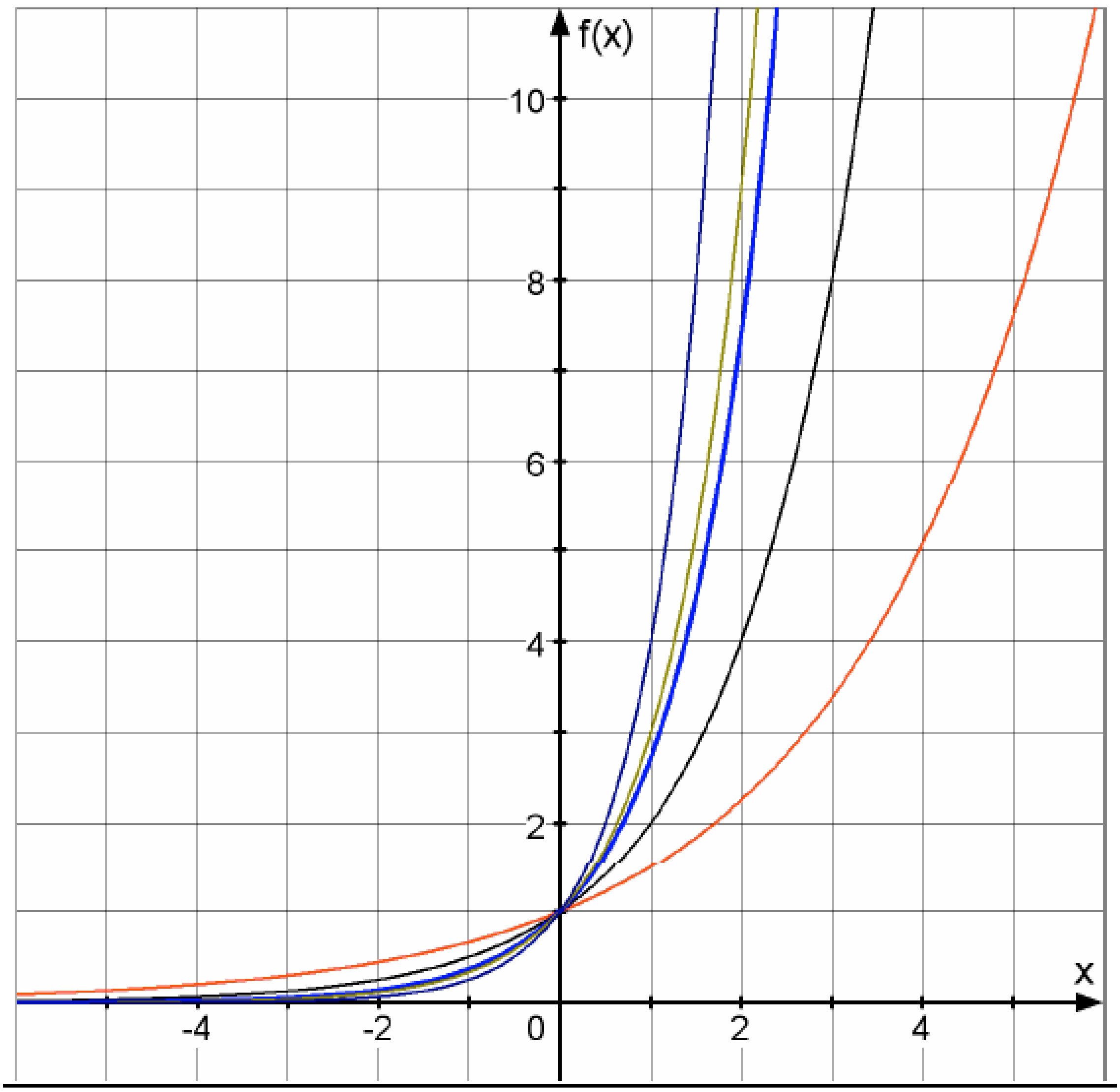
Thema: Die e-Funktion

Verfasser: Andrea Wendelgaß

Kurslehrer: Frau Schützner

Inhaltsverzeichnis / Gliederung

Schaubilder der Expotentialfunktion f(x) = a^x ; $a \neq 1$, $a > 0$



Von rechts nach links zeigt das Schaubild die Kurven folgender Expotentialfunktionen :

f(x) = a^x mit a = 1,5 ; a = 2 ; **a =** e ($\approx$ 2,71828) ; a = 3 ; a = 4

► Nur für a > 0, weil für a < 0 der Ausdruck a^x für $x \in$ ¤ nicht definiert wäre

- denn sonst wäre für a = -2 und x = $\frac{1}{2}$, $a^x = -2^{1/2} = \sqrt{-2}$ und dies ist nicht erlaubt !

► Man betrachtet nur a > 1, weil die Funktionen mit 0 < a < 1 nur die Spiegelungen der jeweiligen Kehrwertfunktion an der y-Achse sind

Es gilt $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ und für 0 < a < 1 und a = $\frac{1}{b}$ folgt b = $\frac{1}{a}$ > 1.

Dann gilt $a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x} \Rightarrow$ das Schaubild von y = a^x ist die Spiegelung des Schaubilds von y = b^x an der y-Achse (b > 1).

Zahlenbeispiel : a = $\frac{1}{2}$,daraus folgt b = $\frac{1}{a}$ = 2 > 1

$$a^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{(-x)} \Rightarrow \text{Spiegelung an der y-Achse}$$

Beobachtungen am Schaubild :

1. Alle dargestellten Expotentialfunktionen haben den Punkt **S(0|1)** als Schnittpunkt mit der y-Achse. Man nennt **S den markanten Punkt** dieser Kurven.

2. Die negative x – Achse ist die waagrechte Asymptote für a > 1 (für a < 1 ist die positive x – Achse waagrechte Asymptote)

   Für a > 1 gilt: $x \to \infty$ folgt $a^x \to +\infty$;

   $$x \to -\infty \text{ folgt } a^x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x \to \infty \text{ folgt } \frac{1}{a^{-x}} \to 0$$

   oder anders dargestellt :

   $$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{-x \to \infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^{-x}}$$

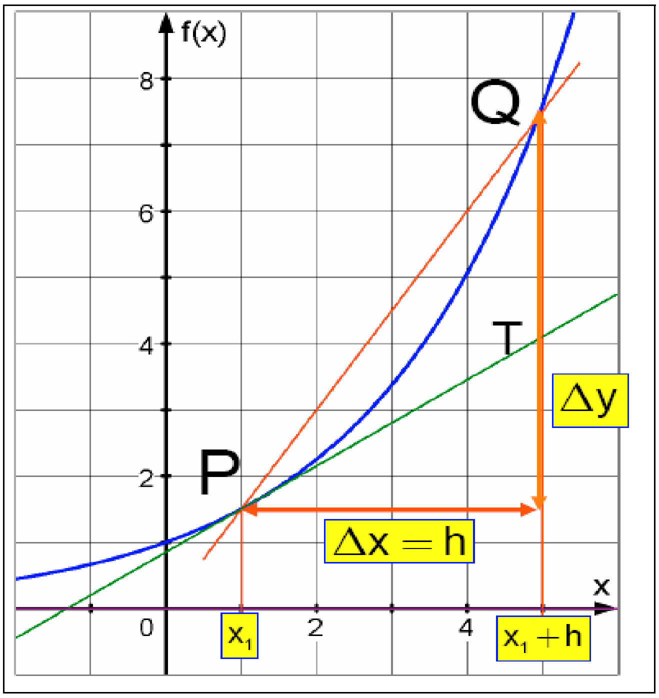
3. Keines dieser Schaubilder schneidet oder berührt die x – Achse. Dies gründet in unserer Bedingung a > 0; somit sind nämlich auch alle Funktionswerte $a^x > 0$
   → es gibt keine Nullstellen und der Wertebereich dieser Funktionen sind die positiven reellen Zahlen.

4. Alle Expotentialfunktionen mit a > 1 sind streng monoton wachsend und linksgekrümmt.

2. Herleitung der Funktion f(x) = e^x

2.1 Berechnung der Ableitungsfunktion f'(x) = e^x

► Mit Hilfe des Differenzialquotienten bildet man aus der Sekantensteigungfunktion die Tangentensteigungsfunktion und berechnet die Tangentensteigung an einer Stelle x_1:



►P(x_1 | a^{x_1}) sei der Punkt, indem wir die Tangentensteigung bestimmen wollen.

► Durch P(x_1 | a^{x_1}) und einen zweiten Punkt Q(x_1 +h | a^{x_1+h}), Q∈f(x) = a^x, wird zunächst eine Sekante gelegt.

► Durch die Bedingung h ≠ 0 gilt P ≠ Q Somit ist die Steigung der Sekante PQ berechenbar; aufgrund der Abhängigkeit der Sekante PQ von h erhalten wir die **Sekantensteigungsfunktion:**

$$m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x_1+h} - a^{x_1}}{h}$$

$$m_s(h) = \frac{a^{x_1}a^h - a^{x_1}}{h} = a^{x_1}\frac{a^h - 1}{h}$$

► Lässt man h gegen 0 laufen, bedeutet das, dass P gegen Q läuft; durch diesen Prozess wird aus der Sekante PQ die Tangente in P.

► Der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion für h gegen 0 bildet die Tangentensteigung

$$m_T(h) = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \lim_{h\to 0} a^{x_1}\frac{a^h - 1}{h} = a^{x_1}\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

► Für die Ableitung an der Stelle x_1 verwenden wir die gebräuchliche Schreibweise:

$$\textbf{(I)} \qquad f'(x_1) = a^{x_1} \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

► Da alle Expotentialfunktionen den selben markanten Punkt S(0|1) vorweisen können untersucht man zuerst die Tangentensteigung an der Stelle $x_1 = 0$

$$f'(0) = a^0 \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

► Der Grenzwert auf der rechten Seite der Gleichung (I) ist also identisch mit dem Ableitungswert f'(0); setzt man diese Tatsache ein, dann erhält man

$$\textbf{(II)} \qquad f'(x_1) = a^{x_1} \cdot f'(0)$$

► Mit dieser Gleichung kann man die Tangentensteigung in jedem beliebigen Punkt x_1 berechnen, unter der Voraussetzung, dass der Wert f'(0) bekannt ist.

Allgemein, ohne Index 1, lautet (II) :

$$\textbf{(III)} \qquad f'(x) = f'(0) \cdot a^x$$

2.1.1 Graphische Annäherung an e

► Der schweizer Mathemathiker Johannes Euler kam nun auf die Idee, die Zahl e zu bestimmen, deren Funktion f(x) = e^x bei x = 0 den Ableitungswert f'(0) = 1 annimmt; dies wäre dann die einfachste Art, die Gleichung (III) f'(x) = f'(0) · a^x zu berechnen.

► Hierzu gehen wir erst einmal experimentell vor:
⇒ Abbildung 1 zeigt 5 verschiedene Schaubilder; sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S(0|1), hier kann man die Tangente einzeichnen und die Steigung abmessen.

Hat man exakt gearbeitet, dann erhält man folgende Werte:

für a = 1,5	**gilt f(x) =** $1{,}5^x$	**;** m_T **= 0,405**	**und somit f'(x) = 0,405** · $1{,}5^x$
für a = 2	**gilt f(x) =** 2^x	**;** m_T **= 0,693**	**und somit f'(x) = 0,693** · 2^x
für a = 3	**gilt f(x) =** 3^x	**;** m_T **= 1,099**	**und somit f'(x) = 1,099** · 3^x
für a = 4	**gilt f(x) =** 4^x	**;** m_T **= 1,382**	**und somit f'(x) = 1,382** · 4^x

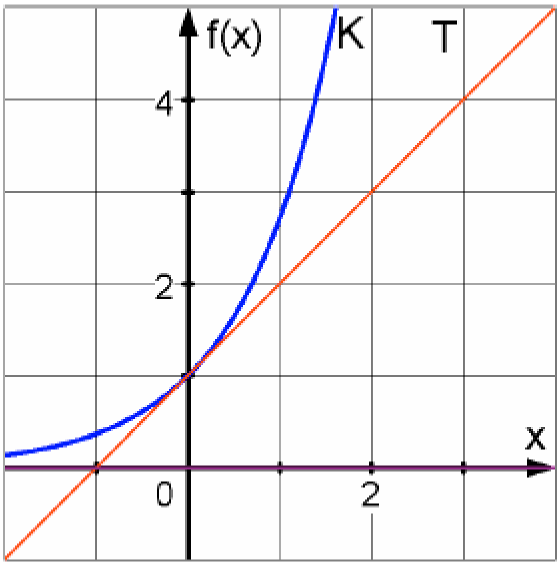
$\Rightarrow$ die Kurve der Funktion f(x) = e^x wurde bisher weggelassen, da e diejenige Zahl (Basis) sein soll, deren Funktion f(x) = e^x bei x = 0 den Ableitungswert 1 hat!

► Gemäß der Gleichung (III) $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$ bedeutet $f'(0) = 1$, für f(x) = e^x :

zu $f(x) = e^x$ gehört $f'(x) = e^x$

3. Berechnung der Eulerschen Zahl e

3.1 Berechnung der Eulerschen Zahl mit Hilfe einer Intervallschachtelung



► Die Funktion f(x) = e^x hat das Schaubild y = e^x; die Tangentensteigung in S(0|1) ist 1.
Mit Hilfe des somit bekannten Achsenabschnitts 1 kann man die Tangentengleichung in S aufstellen :

T : y = x + 1

► Rein mit Variablen weiß man nun : weil f(x) = e^x die Ableitungsfunktion f′(x) = e^x hat, ist ihre Ableitung f′(x) = e^x ebenfalls bekannt.
Zudem weiß man, dass die Ableitungen von f(x) = e^x stets positive Werte haben werden, denn $e^0 = 1$, somit $e^x > 0$ $\Rightarrow$ f(x) = $e^x > 0$
f′(x) = $e^x > 0$ → somit ist f(x) = e^x streng monoton wachsend
f″(x)= $e^x > 0$ → somit ist f(x) = e^x links gekrümmt.

► Also liegt das Schaubild K links und rechts vom Berührpunkt S(0|1) oberhalb der Tangente, d.h., für alle x aus IR gilt :

(IV) $$e^x \geq \mathbf{x + 1}$$

Mit Hilfe von zwei unterschiedlichen Zahlenfolgen, deren Grenzwert jeweils 0 ist, und der Ungleichung (IV) führt man nun eine Intervallschachtelung durch.
Hierbei setzt man anstatt x die jeweilige Zahlenfolge ein:

1. Schritt : Zahlenfolge x = $a_n = \frac{1}{n}$ in (IV) einsetzen:

$$e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1 \qquad |\,(\ )^n$$

$$\left(e^{\frac{1}{n}}\right) \geq \left(\frac{1}{\text{n}} + 1\right)^n$$

(V) $$e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2. Schritt : Zahlenfolge x = $b_n = -\frac{1}{n+1}$ in IV einsetzen

$$e^{-\frac{1}{n+1}} \geq -\frac{1}{n+1} + 1$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}} \geq \mathbf{1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}} \geq \frac{n+1-1}{n+1}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}} \geq \frac{n}{n+1}$$ → auf jeder Seite den Kehrwert bilden

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} \qquad |\,(\ )^{n+1}$$

$$\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

(VI) $$e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

► **Schreibt man (V) und (VI) nebeneinander, dann entsteht eine Doppelungleichung :**

$$\mathrm{e} \;\geq\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{d.h.} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; \mathrm{e} \quad \text{und} \quad \mathrm{e} \;\leq\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$\Rightarrow$ **(VII)**

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; \mathrm{e} \;\leq\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

► Man kann nun beweisen, dass die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ streng monoton wächst,

d.h. mit jeder weiteren Nummer n wird die in (VIII) links stehende Zahl größer,
und man kann beweisen, dass die Folge

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ beschränkt ist.

Aus der Monotonie und der Beschränktheit folgt, dass

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ einen Grenzwert besitzt.

Nach (VII) muss dann gelten:

Diejenige Exponentialfunktion f(x) = a^x, die bei x = 0 den Ableitungswert f′(0) = 1 hat und für die f′(x) = f(x) gilt, hat die Basis

$$\mathrm{a} = \mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Beweis:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots.\cdot(n-(k-1))}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\cdot(1-\frac{3}{n})\ldots\ldots.(1-\frac{k-1}{n})$$

1)

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\ldots..+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\cdot(1-\frac{3}{n})\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n})$$

► Man schätzt ab, dass alle vorkommenden Faktoren kleiner als 1 sind.

$$\Rightarrow \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}....+\frac{1}{n!}$$

► Erneutes Abschätzen mit 2-er Potenzen: die Fakultät n! einer Zahl n ist stets mindestens so groß wie die 2-er Potenz mit Exponent n-1.
→ wenn die Fakultät im Nenner steht, ist der „Fakultätsbruch" immer < „Potenzbruch"

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ für n > 2

$$\Rightarrow \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+.....\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 3-\frac{1}{2^{n-1}} \le 3$$

$\Rightarrow \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist beschränkt !

Folgerung für n → (n+1):

2) $$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdot...\cdot(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdot...\cdot(1-\frac{n}{n+1})$$

► Vergleicht man 1) mit 2), dann stellt man fest, dass bei der Summe in 1) in jeder der Klammern mehr von 1 abgezogen wird: $(1-\frac{1}{n})$ als bei der Summe in 2): $(1-\frac{1}{n+1})$.

► Daraus folgt 2) $\ge$ 1)

da bei 2) noch ein weiterer Summand existiert $\left(\frac{1}{(n+1)!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdot...\cdot(1-\frac{n}{n+1})\right)$

gilt sogar sicher 2) > 1).

$\Rightarrow \qquad a_{n+1} > a_n$, also ist die Folge (a_n) streng monoton wachsend.

► Folgen, die streng monoton wachsend sind und nach oben begrenzt sind, sind konvergent, d.h., diese Folgen besitzen einen Grenzwert.

► Dass die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ links von e den selben Grenzwert g hat, wie die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ rechts von e, lässt sich mit den Potenzgesetzen zeigen.
Bildet man nun den Grenzwert für $n \to \infty$, dann folgt :

$$g = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = g$$

► Da die beiden Folgen den selben Grenzwert g haben und e durch die Intervallschachtelung zwischen ihnen liegt, muss g = e der Grenzwert sein.

► Jeder Nummer n lässt sich ein spezielles Intervall zuordnen; jedes nächste Intervall ist kleiner als das vorherige.

►	n = 1	2	< e <	4
	n = 5	2,488430	< e <	2,985984
	n=10	2,593742	< e <	2,853116
	n = 50	2,691588	< e <	2,745479
	n = 100	2,704813	< e <	2,731861
	n = 1000	2,716942	< e <	2,719641
	n = 10000	2,718141	< e <	2,718413

⇒ also muss gelten $e \approx 2{,}718$

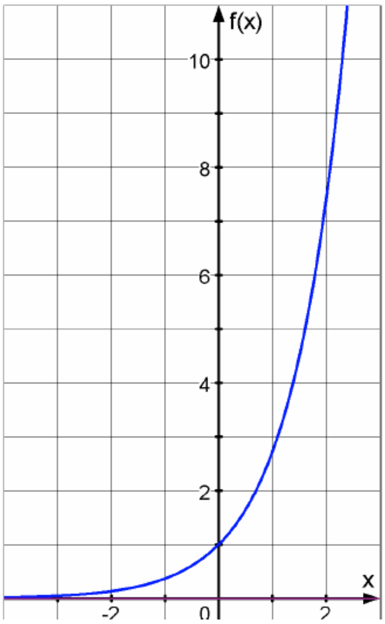
Bemerkung: man kann sogar zeigen, dass gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}....+\frac{1}{n!} < e$$

Dadurch ergibt sich eine weitere Berechnungsmöglichkeit für e mittels

$$\mathbf{e} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}....+\frac{1}{n!}+....$$

4. Wesentliche Funktionseigenschaften von f(x) = e^x



► Wichtige Funktionswerte : f(0) = 1

f(1) = e ≈ 2,718

f(2) = e^2 ≈ 7,4

f(-1) = $e^{-1} = \frac{1}{e}$ ≈ 0,37

f(-2) = $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ ≈ 0,14

► Randwerte/Grenzwerte : $x \to \infty \Rightarrow f(x) = e^x \to \infty$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) = e^x \to 0$

d.h die negative x-Achse ist waagrechte Asymptote

► Wertemenge : W = IR+

► Da für alle x aus IR gilt: $f(x) = e^x > 0$, besitzt f **keine Nullstellen.**

► **Ableitungen** : $f'(x) = e^x > 0$ d.h. f **steigt streng monoton** und hat **keine Extremwerte.**

$f''(x) = e^x > 0$ d.h. das Schaubild K von f ist **immer linksgekrümmt** und besitzt **keine Wendepunkte.**