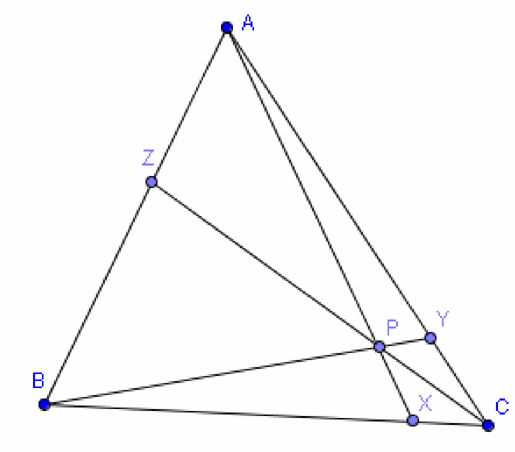
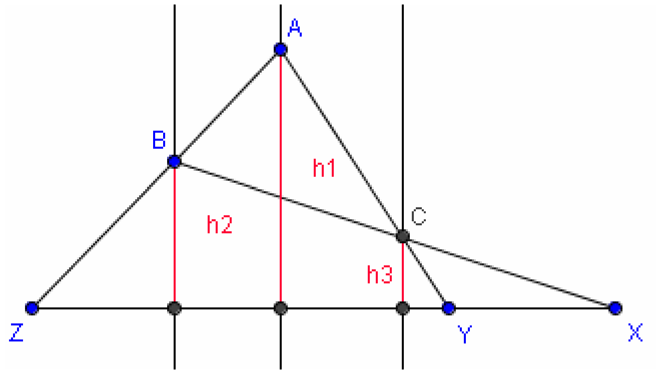
Merkwürdige Punkte und Geraden am Dreieck

Von Florian Modler

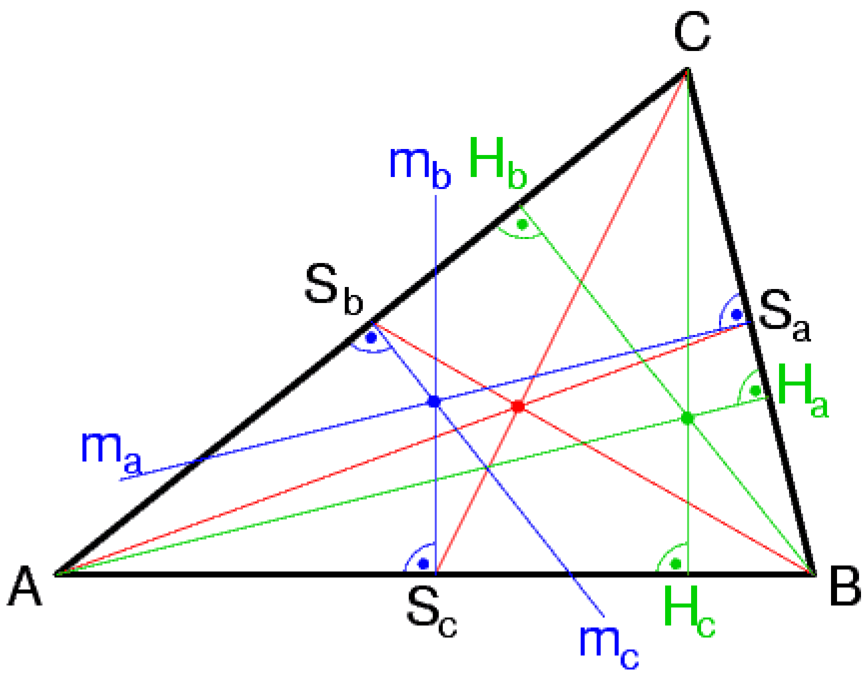
Juli 2006



Der Satz von Ceva



Der Satz von Menelaus



Merkwürdige Punkte und Linien im Dreieck

Inhaltsverzeichnis

In diesem Referat beschäftige ich mich mit den Sätzen von Ceva und Menelaus und mit deren Umkehrsätzen. In diesem Kontext werde ich den Zusammenhang dieser beiden Sätze erläutern.

Im zweiten Teil beschäftige ich mich dann mit einem beliebigen Dreieck und den ihm zugeordneten bekanntesten Punkten und Geraden: Mit den Seitenhalbierenden, dem Schwerpunkt, dem Höhenschnittpunkt, den Winkelhalbierenden, dem Inkreismittelpunkt und schließlich mit dem Umkreismittelpunkt.

Abgerundet werden die einzelnen Teile durch Aufgaben, die dazu dienen sollen, das Verständnis und das neu gewonnene Wissen zu festigen und zu überprüfen.

In der vorliegenden Ausarbeitung sind Punkte, sowie Winkel mit Großbuchstaben wie A bezeichnet, Strecken mit zwei Großbuchstaben wie AB und Flächen mit Großbuchstaben der Eckpunkte in Klammern wie (ABC).

1 Sätze von Ceva und Menelaus

1.1 Der Satz von Ceva

Der *Satz von* Ceva stammt vom italienischen Mathematiker Giovanni Ceva (*7. Dezember 1647 in Mailand, † 15. Juni 1734 in Mantua).

Nach dem Besuch der jesuitischen Hochschule in Mailand und einem Studium der Mathematik an der Universität von Pisa arbeitete er ab 1686 als Professor für Mathematik an der Universität von Mantua.

Der Satz von Ceva wurde in seinem Buch „De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio" im Jahr 1678 veröffentlicht.[1]

Um den Satz von Ceva einzuführen, benötigen wir den Begriff der *Ecktransversale*.
Eine Strecke, die eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkt auf der gegenüberliegenden Seite verbindet, heißt *Ecktransversale*.

Beispiel: In Abbildung 1 sind X, Y und Z jeweils Punkte auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC. Die Strecken AX, BY, CZ sind damit die Ecktransversalen.

Der Satz von Ceva (Satz 1.1):

Schneiden sich drei Ecktransversalen AX, BY, CZ eines Dreiecks ABC in einem Punkt, dann gilt:

$$\frac{BX}{XC} \bullet \frac{CY}{YA} \bullet \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

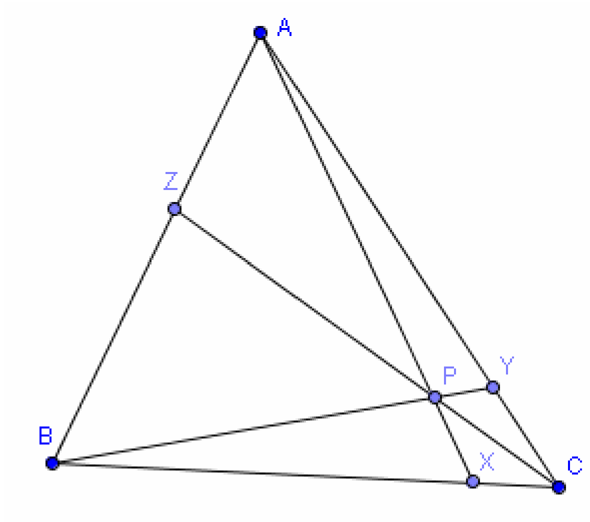


Abb. 1 Der Satz von Ceva

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva

Beweis des Satzes von Ceva:

Um den Satz von Ceva zu beweisen, erinnern wir uns daran, dass die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe proportional zu den Grundseiten sind.

Mit Hilfe von Abbildung 1 gilt damit:

$$\frac{BX}{XC}=\frac{(ABX)}{(AXC)}=\frac{(PBX)}{(PXC)}=\frac{(ABX)-(PBX)}{(AXC)-(PXC)}=\frac{(ABP)}{(CAP)}$$

Analog erhält man:

$$\frac{CY}{YA}=\frac{(BCP)}{(ABP)} \text{ bzw. } \frac{AZ}{ZB}=\frac{(CAP)}{(BCP)}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{BX}{XC}\bullet\frac{CY}{YA}\bullet\frac{AZ}{ZB}=\frac{(ABP)}{(CAP)}\bullet\frac{(BCP)}{(ABP)}\bullet\frac{(CAP)}{(BCP)}=1$$ q.e.d.

1.2 Die Umkehrung des Satzes von Ceva

Die Umkehrung des Satzes von Ceva (Satz 1.2):

Genügen drei Ecktransversalen AX, BY, CZ der Gleichung $\frac{BX}{XC}\bullet\frac{CY}{YA}\bullet\frac{AZ}{ZB}=1$, so schneiden sie sich in einem Punkt.

Beweis der Umkehrung des Satzes von Ceva:

Wir nehmen zuerst an, dass sich die ersten beiden Ecktransversalen im Punkt P schneiden und dass CZ' die dritte Ecktransversale durch diesen Punkt verläuft.
Mit Hilfe des Satzes von Ceva gilt damit:

$$\frac{BX}{XC}\bullet\frac{CY}{YA}\bullet\frac{AZ'}{Z'B}=1$$

Da wir aber davon ausgegangen sind, dass $\frac{BX}{XC}\bullet\frac{CY}{YA}\bullet\frac{AZ}{ZB}=1$ gilt, folgt:

$$\frac{BX}{XC}\bullet\frac{CY}{YA}\bullet\frac{AZ}{ZB}=\frac{BX}{XC}\bullet\frac{CY}{YA}\bullet\frac{AZ'}{Z'B}\Leftrightarrow\frac{AZ}{ZB}=\frac{AZ'}{Z'B}.$$

Damit fallen Z und Z' zusammen und wir haben bewiesen, dass sich die drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden.
Analog gilt dies auch für andere Punkte. q.e.d.

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Satz von Ceva ein Kriterium für den Schnitt von Geraden ist.

1.3 Aufgaben zum Satz von Ceva

Aufgaben:

Beweise die folgenden Sätze:

1.) Sind X, Y und Z die Seitenmitten, so schneiden sich die dazugehörigen Ecktransversalen in einem Punkt.

2.) Die Ecktransversalen, die auf den gegenüberliegenden Seiten senkrecht stehen, schneiden sich in einem Punkt.

3.) ABC und $A'B'C'$ seien zwei nicht kongruente Dreiecke, deren entsprechenden Seiten (vergleiche Abbildung 2) jeweils zueinander parallel sind.
In diesem Fall schneiden sich die drei Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt.

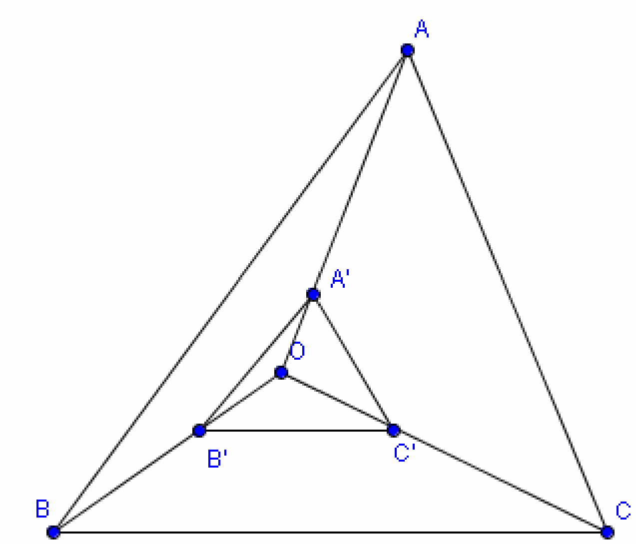


Abb. 2 Aufgaben zum Satz von Ceva (Hilfe für Aufgabe 3)

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben:

Zu 1.):

Wir benutzen den Satz von Ceva mit $BX = XC, CY = YA, AZ = ZB$ (da die Punkte X, Y und Z die Dreiecksseiten halbieren, siehe hierzu Abbildung 3;
Der Mittelpunkt der Strecke AB sei Z, der der Strecke BC sei X und der der Strecke AC sei Y.).

Es gilt damit: $\frac{BX}{XC} \bullet \frac{CY}{YA} \bullet \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{BX} \bullet \frac{CY}{CY} \bullet \frac{AZ}{AZ} = 1$ q.e.d.

(Nicht anderes als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, also Schwerpunkt.
Siehe dazu Abschnitt 2.2)

Zu 2.):

Wir benutzen den Satz von Ceva mit $BX = c \bullet \cos B, CX = b \bullet \cos C, CY = a \bullet \cos C,$
$AY = c \bullet \cos A, AZ = b \bullet \cos A, BZ = a \bullet \cos B$ (da rechtwinklige Dreiecke vorliegen, siehe dazu Abbildung 4)

Einsetzen liefert:

$\frac{c \bullet \cos B \bullet a \bullet \cos C \bullet b \bullet \cos A}{b \bullet \cos C \bullet c \bullet \cos A \bullet a \bullet \cos B}$ Kürzen liefert damit $= 1$. q.e.d.

(Entspricht den Höhen, die sich im Höhenschnttpunkt schneiden.Siehe dazu Abschnitt 2.3)

Zu 3.):

Wir nehmen an, dass BB' und CC' sich in O schneiden, und OA die Strecke $A'B'$ in A_1 schneidet.

Wegen $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ gilt:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A_1B'}{A_1B}$.

Daher fällt A_1 mit A' zusammen. q.e.d.

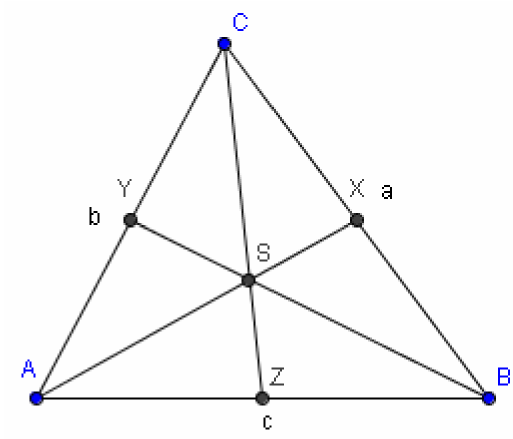


Abb. 3 Skizze zu Aufgabe 1

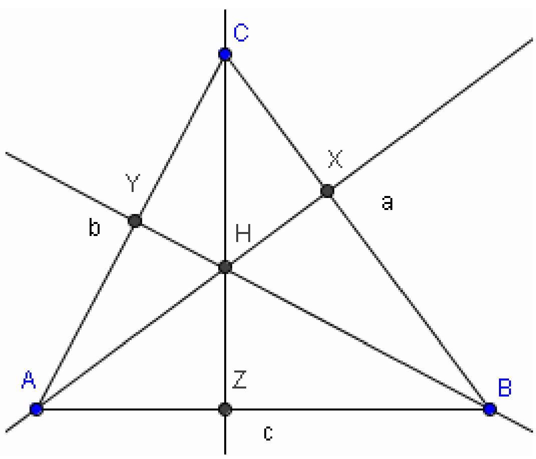


Abb. 4 Skizze zu Aufgabe 2

1.4 Der Satz von Menelaus

Der Satz von Menelaus stammt von Menelaus von Alexandria, der etwa 100 n. Chr. gelebt hat. Er schrieb eine Abhandlung mit dem Titel „Sphaerica", in der er bestimmte Eigenschaften eines sphärischen Dreiecks benutzte. Er schrieb, als wäre die analoge Eigenschaft eines ebenen Dreiecks wohlbekannt.
Vielleicht war sie das, aber da kein früherer Nachweis überliefert ist, nennt man diese Feststellung einfach den *Satz von Menelaus*.[2] [1]

Der Satz von Menelaus (Satz 1.4):

Sind die Punkte X, Y, Z auf den (geeignet verlängerten) Seiten BC, CA, AB des Dreiecks kollinear (liegen sie alle also auf einer gemeinsamen Geraden), dann gilt:

$$\frac{BX}{CX} \bullet \frac{CY}{AY} \bullet \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Beweis des Satzes von Menelaus:

Um den Satz von Menelaus zu beweisen, betrachten wir Abbildung 5:

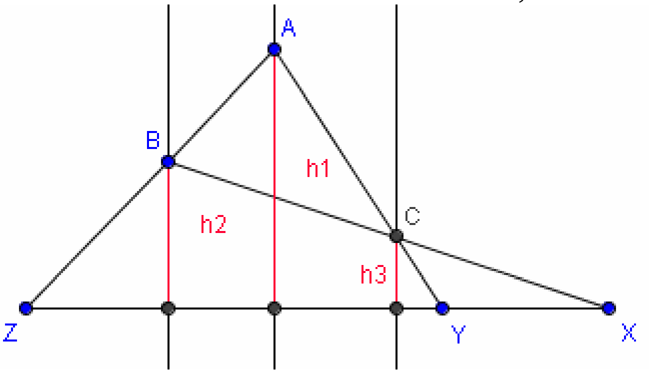


Abb. 5 Der Satz von Menelaus

Vorausgesetzt sei die Kollinearität der Punkte X, Y, Z. Wie in Abbildung 5 seien h_1, h_2 und h_3 die Längen der Lote von A, B, C auf die Gerade XY, positiv gerechnet auf der einen Seite dieser Geraden, negativ auf der anderen. In unserem Fall erhalten wir nur positive Werte, da wir nur auf einer Seite der Geraden XY operieren.
Aus den drei Gleichungen

$$\frac{BX}{CX} = \frac{h_2}{h_3}, \frac{CY}{AY} = \frac{h_3}{h_1}, \frac{AZ}{BZ} = \frac{h_1}{h_2}$$ (mit Hilfe des 2. Strahlensatzes, siehe Anhang 5.1, Seite 25)

erhalten wir das gewünschte Ergebnis durch Multiplikation:

$$\frac{BX}{CX} \bullet \frac{CY}{AY} \bullet \frac{AZ}{BZ} = \frac{h_2}{h_3} \bullet \frac{h_3}{h_1} \bullet \frac{h_1}{h_2} = 1$$ (nach Kürzen)

Man beachte aber bitte, dass immer entweder alle drei Seiten (Abb. 10) oder genau eine Seite des Dreiecks ABC verlängert werden müssten (Abb. 9), um die drei verschiedenen kollinearen Punkte X, Y, Z unterzubringen. q.e.d.

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Menelaos_%28Mathematiker%29

1.5 Die Umkehrung des Satzes von Menelaus

Die Umkehrung des Satzes von Menelaus (Satz 1.5):

Gilt die Gleichung $\frac{BX}{CX} \bullet \frac{CY}{AY} \bullet \frac{AZ}{BZ} = 1$ für Punkte die X, Y, Z auf den drei Seiten, dann sind diese drei Punkte kollinear.

<u>Beweis der Umkehrung des Satz von Menelaus:</u>

Um den Beweis zu führen, betrachten wir Abbildung 6:

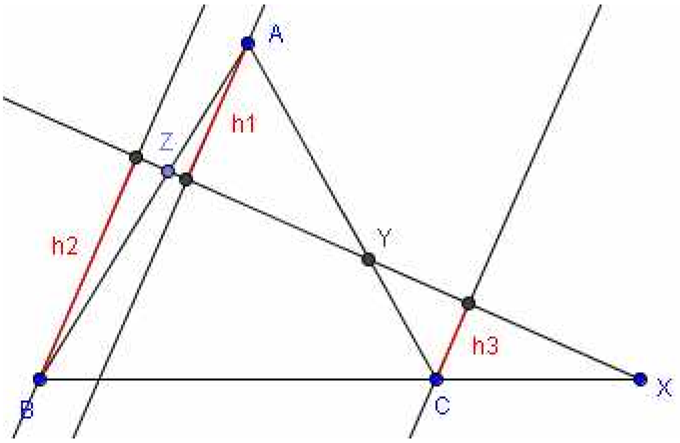


Abb. 6 Die Umkehrung des Satzes von Menelaus

Liegen umgekehrt die Punkte X, Y, Z auf den drei Seiten derart, dass $\frac{BX}{XC} \bullet \frac{CY}{YA} \bullet \frac{AZ}{ZB} = 1$ gilt, dann mögen sich die Geraden AB und XY in Z' treffen.
Dann gilt:
$\frac{BX}{XC} \bullet \frac{CY}{YA} \bullet \frac{AZ'}{Z'B} = 1$. Daher ist $\frac{BX}{XC} \bullet \frac{CY}{YA} \bullet \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} \bullet \frac{CY}{YA} \bullet \frac{AZ'}{Z'B} \Leftrightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ'}{Z'B}$.
Damit fällt Z' mit Z zusammen. Damit haben wir bewiesen, dass die Punkte X, Y, Z kollinear sind. q.e.d.

Der Satz von Menelaus ist damit ein Kriterium der Kollinearität.

1.6 Aufgaben zum Satz von Menelaus

Aufgaben:

Folgende Aufgaben sollen zur Überprüfung des eben gewonnenen Wissens gelöst werden.

Beweise die folgenden Sätze
1.) Die Winkelhalbierenden der drei Außenwinkel eines nicht gleichschenkligen Dreiecks treffen die jeweils gegenüberliegenden Seiten in drei kollinearen Punkten.

2.) Die Winkelhalbierenden zweier Winkel eines nicht gleichsenkligen Dreiecks und die Winkelhalbierende des dritten Außenwinkels schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in drei kollinearen Punkten.

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben:

Zu 1.):
Es seien AX, BY und CZ die Halbierenden der Außenwinkel. Dann gilt:

$$\frac{BX}{CX} \bullet \frac{CY}{AY} \bullet \frac{AZ}{BZ} = \frac{c}{b} \bullet \frac{a}{c} \bullet \frac{b}{a} = 1.$$

Zu 2.):
Es seien AX' und BY' die Winkelhalbierenden des Innenwinkels und CZ die Winkelhalbierende des Außenwinkels. Dann gilt:

$$\frac{BX'}{CX'} \bullet \frac{CY'}{AY'} \bullet \frac{AZ}{BZ} = (-\frac{c}{b}) \bullet (-\frac{a}{c}) \bullet \frac{b}{a} = 1.$$

1.7 Zusammenhang zwischen dem Satz von Ceva und dem Satz von Menelaus

Wir fassen noch einmal zusammen:
Der Satz von Ceva ist ein Kriterium für den Schnitt von Geraden (Diese Umkehrung des Satzes von Ceva wird häufig in der Dreiecksgeometrie für Beweise aus dem Themenbereich „Merkwürdige Punkte im Dreieck“ verwendet – wie wir im nächsten Abstand sehen werden.)

Der Satz von Menelaus ist dagegen ein Kriterium für Kollinearität.

Um den Gegensatz dieser beider Sätzen herauszufinden, schreiben wir erstens die Gleichung von Menelaus in der Form $\frac{BX}{CX} \bullet \frac{CY}{AY} \bullet \frac{AZ}{BZ} = -1$ und betrachten folgende vier Abbildungen

In Abbildung 7 ist der Satz von Ceva dargestellt, bei der alle drei Punkte auf den Seiten des Dreiecks liegen:

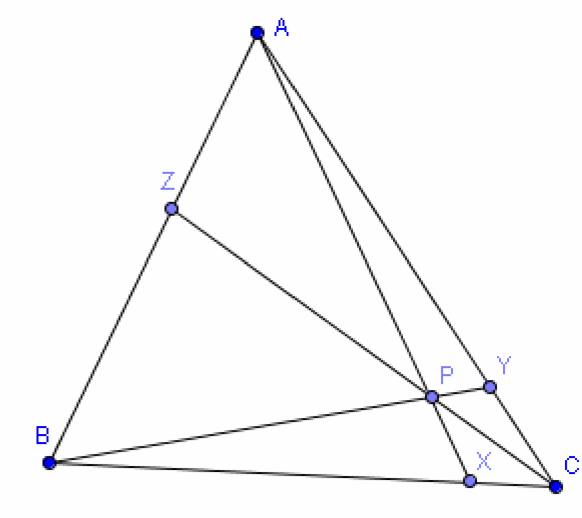


Abb. 7

In Abbildung 8 wird ebenfalls der Satz von Ceva dargestellt, nur liegen in diesem Fall zwei Punkte auf Verlängerungen von Seiten und der dritte Punkt auf der Dreieckseite:

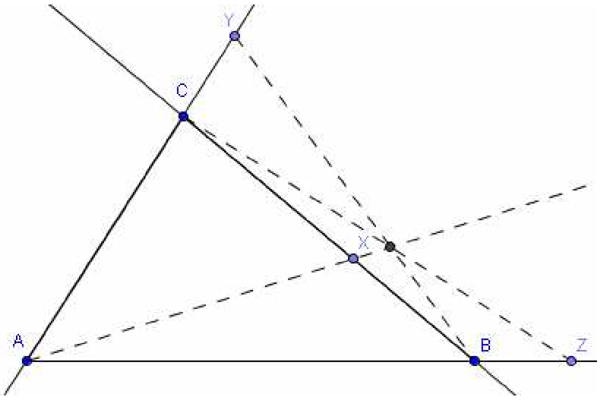


Abb. 8

In Abbildung 9 wird der Satz von Menelaus dargestellt: Zwei Punkte liegen auf zwei Dreiecksseiten und ein Punkt auf einer Verlängerung einer Dreiecksseite

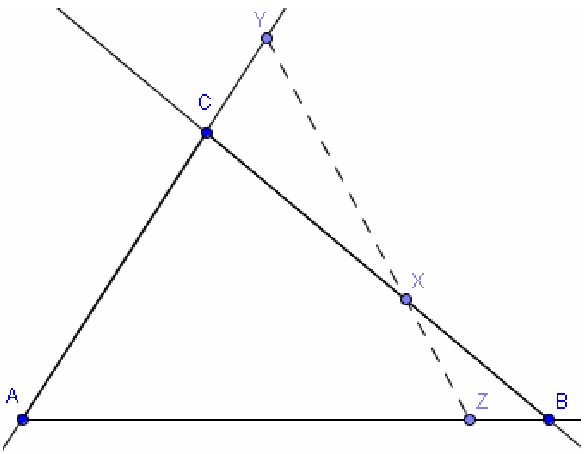


Abb. 9

In Abbildung 10 ist der Satz von Menelaus dargestellt: Die drei Punkte liegen alle auf Verlängerungen von Seiten des Dreiecks

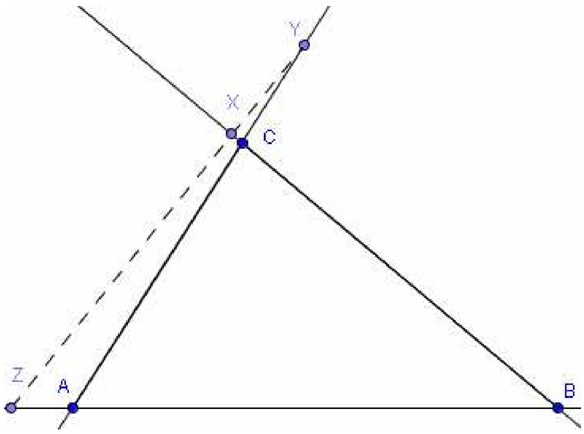


Abb. 10

2 Merkwürdige Punkte und Linien im Dreieck

In einem Dreieck gibt es sehr viele „merkwürdige“ und besondere Punkte und Linien (siehe Abbildung des Deckblatts).
In diesem Abschnitt wollen wir uns auf die **Seitenhalbierenden**, **Höhen**, **Winkelhalbierenden** und **Mittelsenkrechten** beschränken. In diesem Zusammenhang werden wir auch auf den **Schwerpunkt**, den **Höhenschnittpunkt**, **Inkreismittelpunkt** und schließlich auf den **Umkreismittelpunkt** eingehen.

2.1 Zentrisch ähnliche Dreiecke

Zuerst wollen wir noch einmal kurz unser eigentlich schon vorhandenes Wissen über ähnliche Dreiecke und zentrische Streckung auffrischen. Wir beschränken uns dabei nur auf Dreiecke.

2.1.1 Ähnlichkeit bei Dreiecken

Satz:

Zwei Dreiecke D_1 und D_2 heißen **ähnlich**, wenn man D_1 durch eine zentrische Streckung so in ein Dreieck D_1' abbilden kann, das zu D_2 kongruent ist.

Folgende Ähnlichkeitsabbildungen kann man miteinander kombinieren:

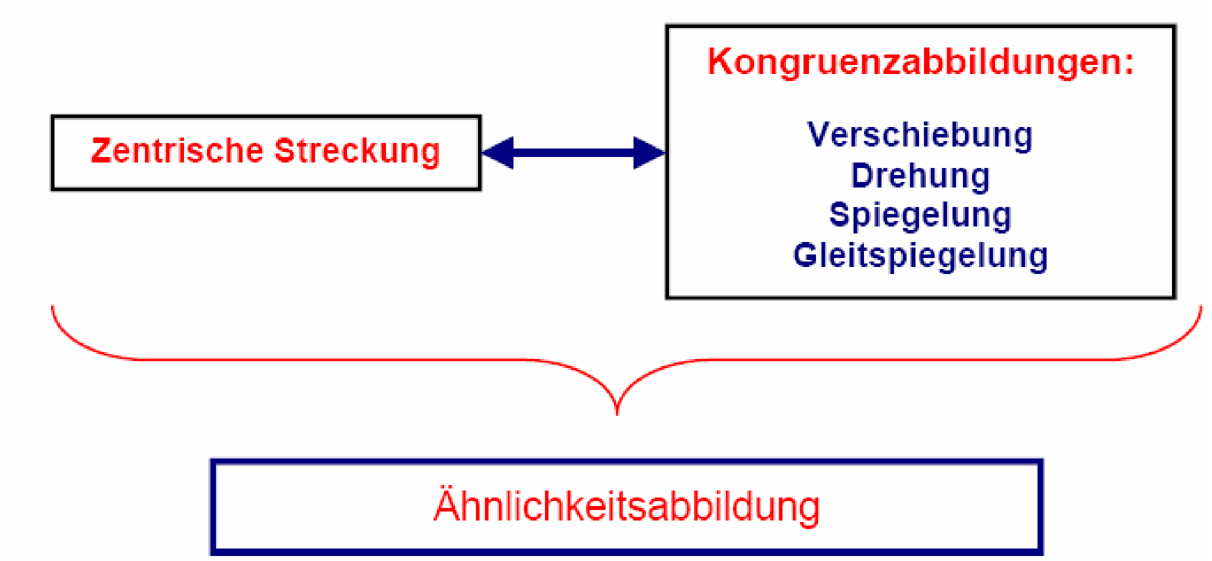


Bild 1: Ähnlichkeitsabbildungen[3]

Bei solchen Ähnlichkeitsabbildungen bleiben die Winkel erhalten, nur die Längen der Dreiecksseiten verändern sich. Diese Verlängerung (oder Verkleinerung) der Seiten erfolgt jedoch im gleichen Verhältnis; mit dem so genannten *Streckfaktor*.

Demnach wird jede Strecke AB auf eine Strecke $A'B'$ abgebildet und zwar mit der Länge $A'B' = kAB.$

[3] Mit freundlicher Unterstützung von http://www.mathe-cd.de .

Betrachten wir ein Beispiel:

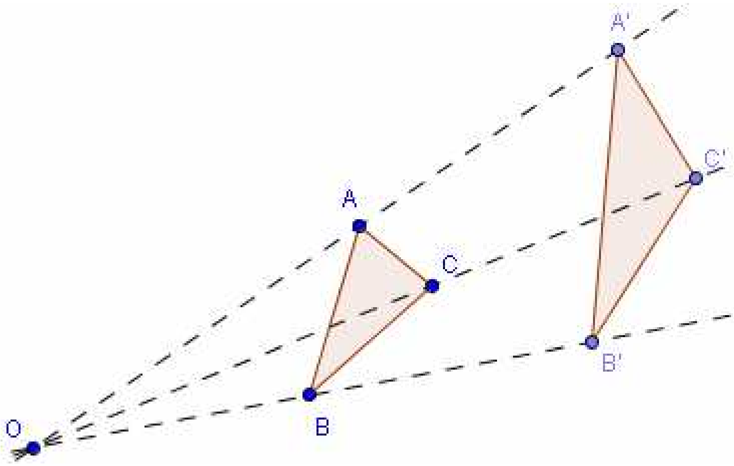


Abb. 11 Zentrische Streckung

Jede Streckung, die nicht lediglich eine Verschiebung ist, heißt **zentrische Streckung**.
Denn alle Graden, die die Punkte einer Figur mit den zugehörigen Bildpunkten verbinden, schneiden sich in einem Punkt.
Dies soll erst einmal genügen. Wir werden nun noch einmal einige der **Ähnlichkeitssätze** zusammenfassend darstellen:

2.1.2 Ähnlichkeitssätze

1. Ähnlichkeitssatz (WWW):

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein (Folge: alle Winkel sind gleich groß), dann sind die beiden Dreiecke ähnlich.

2. Ähnlichkeitssatz (SSS):

Stimmen bei zwei Dreiecken die Längenverhältnisse entsprechender Seiten überein, dann sind die beiden Dreiecke ähnlich.

3. Ähnlichkeitssatz (SWS):

Stimmen zwei Dreiecke im Verhältnis zweier Seiten und im eingeschlossenen Winkel überein, dann sind sie ähnlich.

2.2 Seitenhalbierenden eines Dreiecks

Definition:

Die Transversalen, die die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, heißen **Seitenhalbierende**.

Wir betrachten hierzu Abbildung 12:

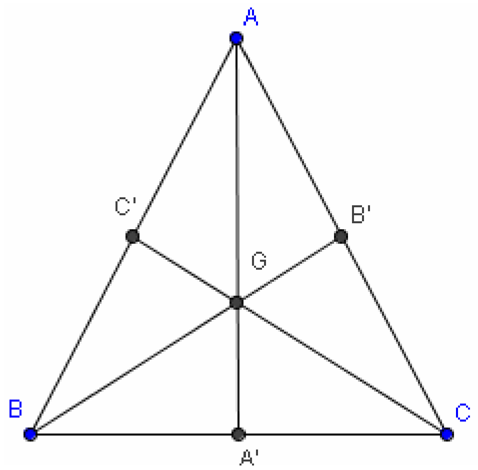


Abb. 12 Seitenhalbierende in einem Dreieck

Die Strecken AA', BB', CC' sind die Seitenhalbierenden des Dreiecks ΔABC.
Aus diesem Grund gilt: $BA' = A'C; CB' = B'A; AC' = C'B$.

2.2.1 Schnitt von Seitenhalbierenden (Schwerpunkt)

Mit Hilfe der Umkehrungs des Satzes von Ceva (Satz 1.2), gilt, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden müssen. Den Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks (in Abbildung 12 ist das der Punkt G) nennt man Schwerpunkt des Dreiecks.

Würde man ein Dreieck aus einem Material gleichmäßiger Dichte und Dicke ausschneiden, so befände sich das Dreieck im Gleichgewicht, wenn man es in diesem Schwerpunkt aufhängen würde. Diesen Punkt nennt man also zu Recht Schwerpunkt des Dreiecks.

2.2.2 Eigenschaften von Seitenhalbierenden

In diesem Abschnitt wollen wir uns einige Eigenschaften von den Seitenhalbierenden eines Dreiecks anschauen. Es gilt folgender Satz:

Satz 2.1:

Ein Dreieck wird durch seine Seitenhalbierenden in sechs kleinere flächengleiche Dreiecke zerlegt.

Wir wollen diesen Satz nun **beweisen:**

Aus Abbildung 13 wird deutlich, dass die Flächeninhalte des Dreiecks $\Delta GBA'$ und $\Delta GA'C$ gleich sind, da die Dreiecke die gleichlange Grundseite und Höhe besitzen.
Daher bezeichnen wir beide Flächen mit demselben Buchstaben *x*. Weiterhin gilt:
$(GCB') = (GB'A)$ und $(GAC') = (GC'B)$.
Diese Flächen bezeichnen wir mit y bzw. z.
Es gilt jedoch auch: $(CAC') = (CC'B)$, das heißt $2y + z = z + 2x$, woraus $x = y$ folgt.
Analog gilt $(ABA') = (AA'C)$, woraus widerum $y = z$ folgt.
Damit haben wir gezeigt, dass $x = y = z$ gilt. In Abbildung 13 fassen wir das Ganze nocheinmal in einer Zeichnung zusammen.

q.e.d.

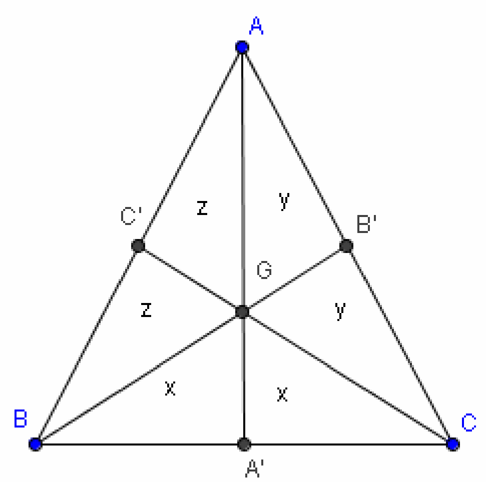


Abb. 13 Seitenhalbierende teilen ein Dreieck in sechs flächengleiche Dreiecke

Aus Abbildung 13 sieht man weiterhin, dass gilt: $(GAB) = 2(GBA')$.
Da diese Dreiecke dieselbe Höhe haben, folgt $AG = 2GA'$. Mit der gleichen Methode folgt:
$BG = 2GB'$ und $CG = 2GC'$.
Wir haben also gleichzeitig folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.2:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2:1.
Anders ausgedrückt: In einem Dreieck dritteln sich die Seitenhalbierenden gegenseitig.

2.3 Höhen eines Dreiecks

Um die Höhen eines Dreiecks einzuführen, betrachten wir Abbildung 14:

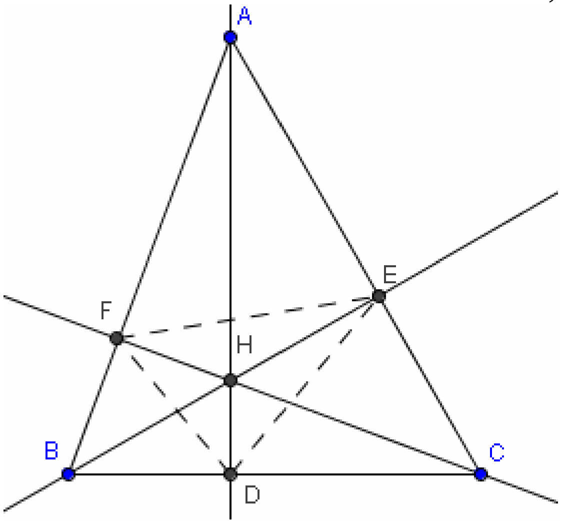


Abb. 14 Höhen eines Dreiecks

Die Ecktransversalen AD, BE, CF (siehe Abbildung 14), die jeweils senkrecht auf den Seiten $BC; CA, AB$ stehen, nennt man die Höhen des Dreiecks ΔABC.
Aus der Umkehrung des Satzes von Ceva folgt, dass sich alle Höhen in einem Punkt schneiden. Diesen Punkt (in Abbildung 14 ist das der Punkt H) nennt man Höhenschnittpunkt.
Die Punkte D, E, F heißen Fußpunkte (oder Lotfußpunkte) der Höhen.
Verbindet man sie paarweise, so erhält man das Dreieck ΔDEF, das sogenannte Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks ΔABC.

2.4 Winkelhalbierenden eines Dreiecks

Weitere wichtige Ecktransversalen sind die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks. Diese sind in Abbildung 15 verdeutlicht:

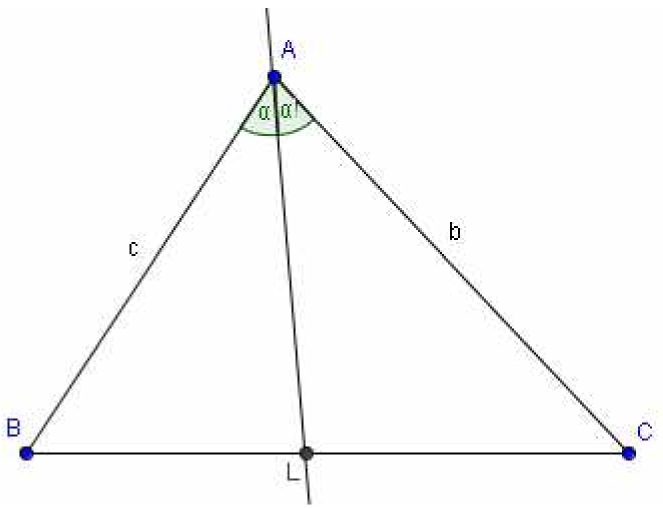


Abb. 15 Winkelhalbierende eines Dreiecks

2.4.1 Eigenschaften von Winkelhalbierenden

Bevor wir die Eigenschaften der Winkelhalbierenden untersuchen können, müssen wir den so genannten **erweiterten Sinussatz** einführen.

Der erweiterte Sinussatz:

Wir bezeichnen einem Dreieck ΔABC ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius der Länge R ein. Wir ziehen den Durchmesser CJ und die Sehne BJ (siehe Abbildung 16 und 17) In den beiden Fällen ist $\measuredangle CBJ$ ein rechter Winkel, da er einem Halbkreis einbeschrieben ist.

Daher gilt in beiden Figuren $\sin J = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}$.

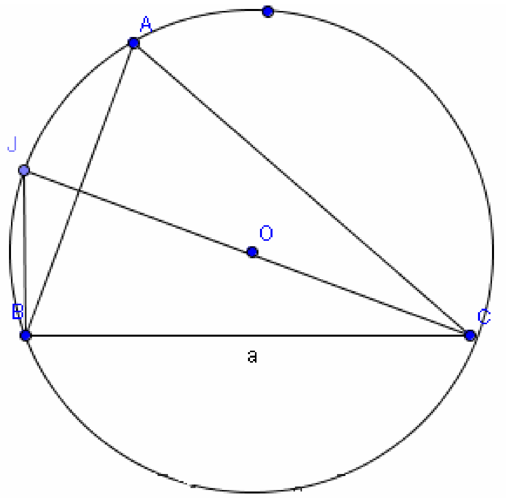


Abb. 16 1. Fall: Spitzer Winkel in A

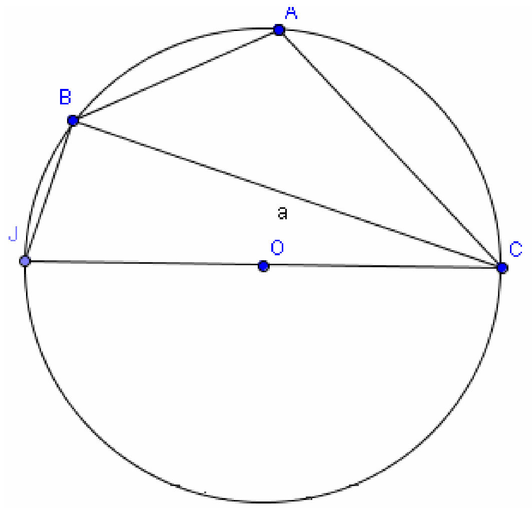


Abb. 17 2. Fall: Stumpfer Winkel in A

In Abbildung 16 gilt: $\measuredangle J = \measuredangle A,$ da diese Winkel über demselben Kreisbogen liegen.
In Abbildung 17 ist $\measuredangle J = 180° - \measuredangle A,$ da gegenüberliegende Winkel eines einbeschriebenen Vierecks sich zu 180° ergänzen.
Wegen $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$ gilt in beiden Figuren $\sin J = \sin A.$ In beiden Fällen gilt weiterhin $\sin A = \frac{a}{2R}$ und somit $\frac{a}{\sin A} = 2R.$
Wenn man diese Überlegungen auf die anderen Winkel überträgt, gilt außerdem:
$\frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R.$ Wir fassen unsere Ergebnisse zu einem Satz zusammen:

Der erweiterte Sinussatz (Satz 2.3):

In einem Dreieck ABC mit dem Umkreisradius R gilt:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Kommen wir nun zu den Winkelhalbierenden zurück. Abbildung 15 zeigt eine der Winkelhalbierenden eines Dreiecks.

Wendet man nun den eben angeführten erweiterten Sinussatz auf die zwei Dreiecke ΔABL und ΔALC an, deren Winkel in L denselben Sinuswert haben, da sie sich zu 180° ergänzen, gilt:

$\frac{BL}{\sin\frac{1}{2}A}=\frac{c}{\sin L}, \frac{LC}{\sin\frac{1}{2}A}=\frac{b}{\sin L}$. Hierraus folgt: $\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b}$.

Wir haben damit (mit den analogen Beziehungen) folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.4:

Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten.

2.4.2 Schnitt von Winkelhalbierenden (Inkreismittelpunkt)

Jeder Punkt auf AL (siehe Abbildung 18) hat von CA und AB den gleichen Abstand. Analog hat jeder Punkt auf der inneren Winkelhalbierenden des Winkels in B den gleichen Abstand zu AB und BC. Somit hat der Punkt I, in dem sich die beiden Winkelhalbierenden schneiden, denselben Abstand r zu allen drei Seiten.

Satz 2.5:

Die Winkelhalbierenden der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

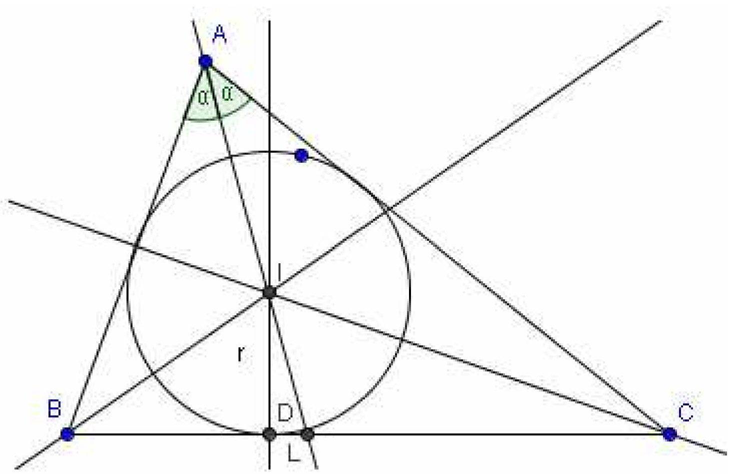


Abb. 18 Inkreismittelpunkt

Der Kreis mit dem Mittelpunkt I und dem Radius r (siehe Abbildung 18) wird von allen drei Seiten berührt. Dieser Kreis ist somit der einbeschriebene Kreis oder **Inkreis**.
I ist der **Inkreismittelpunkt** und r der **Inkreisradius**.

2.5 Schnitt von Mittelsenkrechten (Umkreismittelpunkt)

Der Mittelpunkt des Umkreises in einem Dreieck ist der Schnittpunkt aller drei **Mittelsenkrechten** des Dreiecks, der so genannte **Umkreismittelpunkt des Dreiecks**.

Dass für jedes beliebige Dreieck ein Umkreis existiert, lässt sich folgendermaßen begründen: Alle Punkte der Mittelsenkrechten zu der Strecke AB sind von A und B gleich weit entfernt. Entsprechend haben die Punkte der Mittelsenkrechten zu der Strecke BC übereinstimmende Entfernungen von B und C.
Der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten ist also von allen drei Ecken (A, B und C) gleich weit entfernt. Er muss also auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegen.
Zeichnet man um diesen Schnittpunkt einen Kreis, der durch eine Ecke des Dreiecks geht, so müssen auch die anderen Ecken auf diesem Kreis liegen.

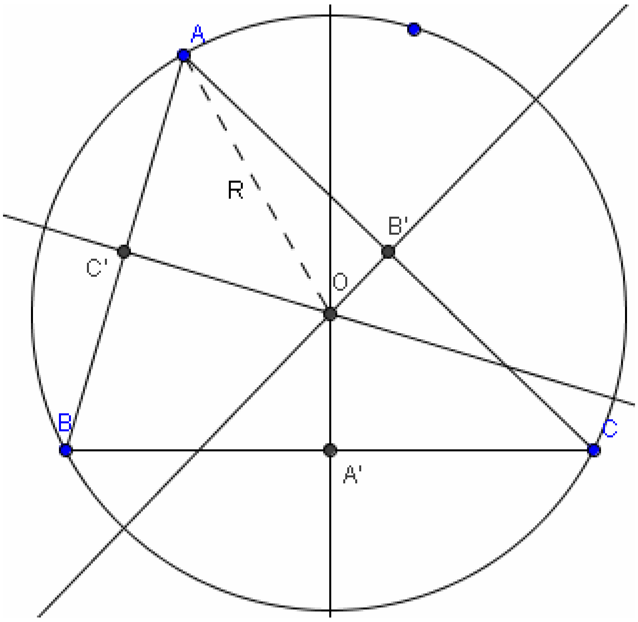


Abb. 19 Schnitt von Mittelsenkrechten (Umkreismittelpunkt)

2.6 Aufgaben zu „Merkwürdige Punkte und Linien im Dreieck“

Aufgaben:

Folgende Aufgaben sollen zur Überprüfung des eben gewonnenen Wissens gelöst werden.

Beweise die folgenden Sätze bzw. löse die Aufgaben.

1.) Der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt eines stumpfwinkigen Dreiecks liegen außerhalb des Dreiecks.

2.) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte eines gegebenen Dreiecks und eines Dreiecks, dessen Seiten dieselben Längen wie die Seitenhalbierenden des Originaldreiecks haben.

3.) Jedes Dreieck mit zwei gleichlangen Seitenhalbierenden ist gleichschenklig.

4.) Jedes Dreieck mit zwei gleichlangen Höhen ist gleichschenklig.

5.) Verwende die Umkehrung des Satzes von Ceva (Satz 1.2) und den Satz 2.4 zu einem weiteren Beweis von Satz 2.5.

6.) Berechne die Länge der Ecktransversalen AA' (siehe Abbildung 13) in Abhängigkeit von a, b und c.($Hinweis$: Satz von Stewart, siehe 5.2 Satz von Stewart).

7.) Das Quadrat der Länge der Winkelhalbierenden AL (siehe Abbildung 15) beträgt $bc[1-(\frac{a}{b+c})^2]$.

8.) Berechne die Länge der Winkelhalbierenden des rechten Winkels in einem Dreieck mit den Seitenlängen $3, 4, 5$.

9.) Das Produkt der Längen zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Umkreisdurchmesser und der Höhe auf die dritte Seite.

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben:

Zu 1.):
Das stumpfwinklige Dreieck ist einem Kreisbogen einbeschrieben, der kleiner als ein Halbkreis ist. Zwei der Höhen schneiden die ihnen gegenüberliegenden Seiten außerhalb.

Zu 2.):
Wir beziehen uns auf Abbildung 13: Konstruiere $A'D$ gleich lang und parallel zu BB', so dass $A'CDB'$ ein Parallelogramm mit Diagonalschnittpunkt E ergibt, der Mittelpunkt der Strecke CB' ist. Nun sind die Seiten von $\Delta DAA'$ gleich lang und parallel zu den drei Seitenhalbierenden von ΔABC, und es gilt:
$$\frac{(ABC)}{(DAA')} = \frac{(CAA')}{(EAA')} = \frac{CA}{EA} = \frac{4}{3}.$$

Zu 3.):
Die gleich langen Seitenhalbierenden BB' und CC' sollen sich, wie in Abbildung 13, in G schneiden. Da $BG = \frac{2}{3}BB' = CG$, ist das Dreieck ΔGBC gleichschenklig und $\measuredangle C'CB = \measuredangle B'BC$. Nach dem Kongruenzsatz SWS (Seite-Winkel-Seite) gilt: $\Delta C'CB \cong \Delta B'BC$ und damit $B = C$.

Zu 4.):
Seien BE und CF die gleich langen Höhen. Aus $b \bullet BE = 2(ABC) = c \bullet CF$ folgt $b = c$.

Zu 5.):
Mit der Bezeichnungsweise von Abbildung 15 gilt: $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}, usw.$

Zu 6.):

Wir benutzen den Satz von Stewart mit $BA' = e = \frac{1}{2}a$ und $A'C = f = \frac{1}{2}a$

Eine Variante des Satzes von Stewart ist: Sei AX eine Ecktransversale der Länge p, die die Strecke BC in zwei Strecken mit den Längen $BX = e$ und $XC = f$ teilt.
Dann gilt: $a(d^2 + ef) = b^2 e + c^2 f$.
Nach dem Satz von Stewart gilt:
$a(d^2 + \frac{1}{4}a^2) = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}c^2 a$ und damit $d = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Zu 7.):

Benutze den Satz von Stewart mit $e = kc; f = kb; k = \frac{a}{b+c}$.

Zu 8.):
$\frac{12\sqrt{2}}{7}$

Zu 9.):
Wenn die Höhe CF in Abbildung 16 und Abbildung 17 hinzugefügt wird, erkennen wir,
das $\Delta BCJ \sim \Delta FCA$, und damit $\frac{BC}{CJ} = \frac{FC}{CA}$.

---

3 Abschluss

Fassen wir noch einmal zusammen, was wir nun gelernt haben:
Wir haben uns den Satz von Ceva und den Satz von Menelaus und ihre Umkehrsätze angeeignet.
Unter anderem mit Hilfe dieser Sätze haben wir dann die wichtigsten Punkte und Linien eines Dreiecks hergeleitet: Seitenhalbierende, Höhen, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierende.
In diesem Zusammenhang haben wir uns angeschaut, welche Punkte entstehen, wenn sich diese Strecken schneiden: Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt, Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt.

4 Literaturverzeichnis

Bücher:

[1] Coxeter, H. S. M., und S. L. Greitzer: Zeitlose Geometrie, Stuttgart, 1983

Internet:

http://www.wikipedia.de – Hauptsächliche biographische Aspekte
http://www.mathe1.de – Abbildungen und Sätze
http://www.matheplanet.com
http://www.mathe-cd.de – Bild 1

Florian Modler

5 Anhang

5.1 Strahlensätze

Wir wollen noch einmal die Strahlensätze auflisten, da diese für viele Anwendungen dieses Referats gebraucht werden.

1. Strahlensatz:

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahlen wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

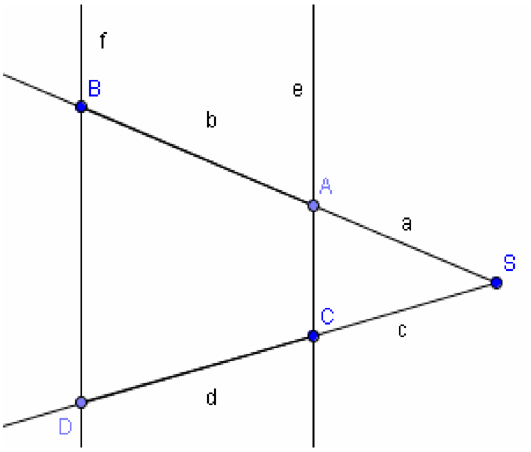


Abb. 20 Strahlensatz 1

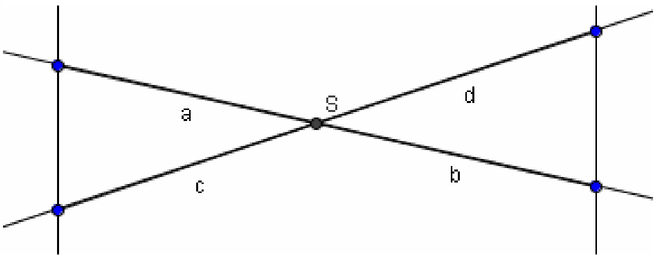


Abb. 21 Strahlensatz 1

Es gilt:

$$\frac{SA}{SB}=\frac{SC}{SD};\frac{SA}{AB}=\frac{SC}{CD};\frac{SB}{AB}=\frac{SD}{CD} \text{ bzw.}$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

Es gilt:

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

2. Strahlensatz:

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf jedem Strahl.

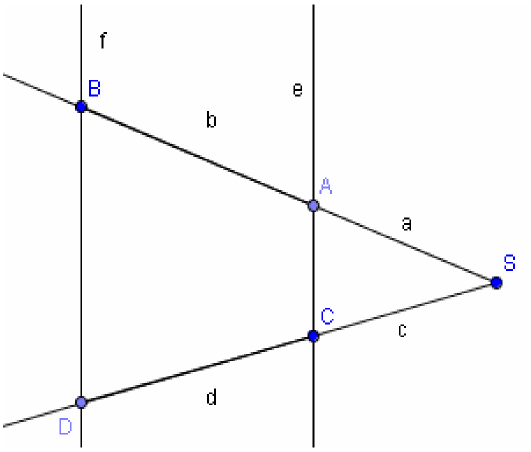


Abb. 22 Strahlensatz 2

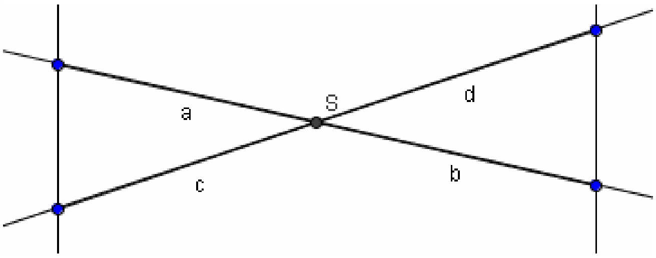


Abb. 23 Strahlensatz 2

Es gilt:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{SA}{SB};\frac{AC}{BD}=\frac{SC}{SD}$$

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{a+b};\frac{e}{f}=\frac{c}{c+d}$$

Es gilt:

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{b};\frac{e}{f}=\frac{c}{d}$$

3. Strahlensatz:

Werden drei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann verhalten sich die Abschnitte auf einer Parallelen wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Parallelen.

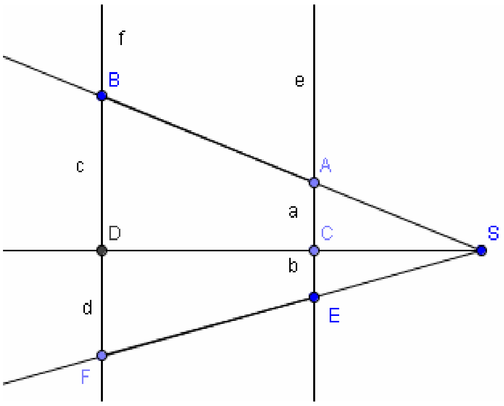


Abb. 24 Strahlensatz 3

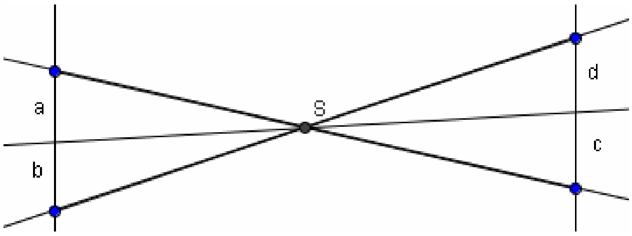


Abb. 25 Strahlensatz 3

Es gilt:

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF};\frac{AC}{AE}=\frac{BD}{BF};\frac{CE}{AE}=\frac{DF}{BF}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

Es gilt:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

5.2 Satz von Stewart

Beim Abschnitt 2.6 Aufgaben zu „Merkwürdige Punkte und Linien im Dreieck“ bei der Aufgabe 6 muss der Satz von Stewart angewendet werden. Hiermit soll dieser Satz noch einmal aufgestellt und bewiesen werden:

Satz von Stewart:

In einem Dreieck ΔABC mit $M \in [BC]$ gilt die Beziehung:

$|AB|^2 \bullet |MC| + |AC| \bullet |MB| - |AM|^2 \bullet |BC| = |BC| \bullet |MB| \bullet |MC|$

<u>Beweis des Satzes von Stewart:</u>

Wir betrachten Abbildung 26. Um den Satz zu beweisen, wenden wir den Satz des Pythagoras in zwei Dreiecken an:

$\Delta ABM: |AB|^2 = |AM|^2 + |MB|^2 - 2 \bullet |HM||MB| \quad (1)$

$\Delta ACM: |AC|^2 = |AM|^2 + |MC|^2 - 2 \bullet |HM||MC| \quad (2)$

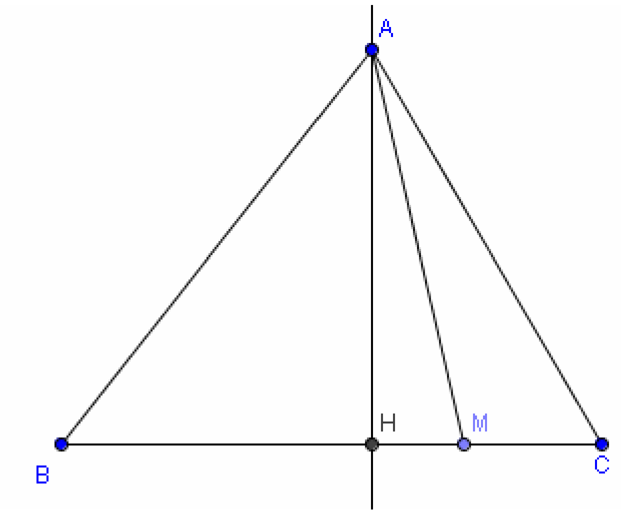


Abb. 26 Satz von Stewart

Wir multiplizieren die Beziehung (1) nun mit $|MC|$ und (2) mit $|MB|$ und addieren die beiden Ergebnisse. Damit erhalten wir:

$|AB|^2|MC| + |AC|^2|MB| = |AM|^2(|MC| + |MC|) + |MB|^2|MC| + |MC|^2|MB|$

$|AB|^2|MC| + |AC|^2|MB| = |AM|^2|BC| + |MC||MB|(|MC| + |MB|)$

$|AB|^2|MC| + |AC|^2|MB| = |AM|^2|BC| + |MC||MB||BC|$ q.e.d.[4]

[4] Diese Herleitung stammt mit leichten Änderungen von „Die Beziehung von Stewart und Anwendungen“ von Peter Andree: (http://www.ksk.ch/mathematik/mathonline/mathematik/geometrie/satz-von-steawrt-main.pdf)

Es gibt eine weitere Herleitung des Satzes von Stewart:

Satz von Stewart:

Sei AX eine Ecktransversale der Länge d, die die Strecke BC (vergleiche Abbildung 27) in zwei Strecken mit den Längen $BX = e$ und $XC = f$ teilt, dann gilt:
$a(d^2 + ef) = b^2 e + c^2 f$.

Beweis:

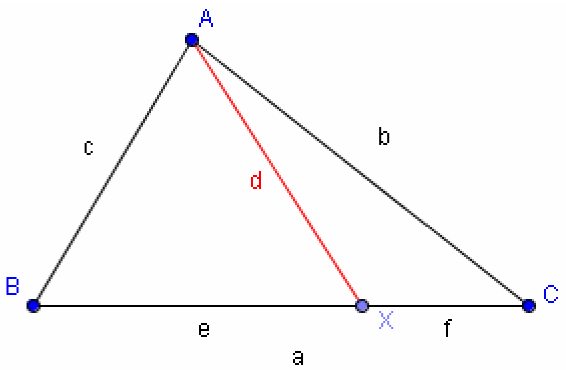


Abb. 27 Satz von Stewart

Um diesen Satz zu beweisen, greifen wir auf den Kosinussatz zurück.

Der Kosinussatz besagt, dass in einem beliebigen Dreieck ABC $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \bullet \cos\beta$ gilt.

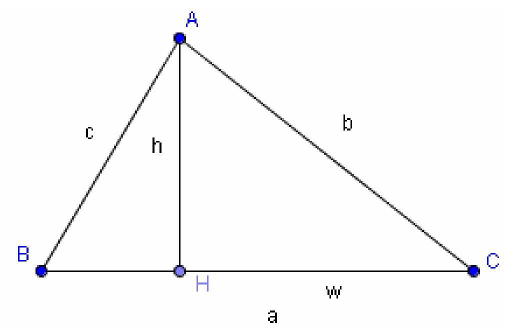


Abb. 28 Der Kosinussatz

Aus dem Dreieck erkennen wir:
$h = c \bullet \sin\beta \wedge w = a - c \bullet \cos\beta$
Mit Hilfe des Pythagoras folgt:
$b^2 = h^2 + w^2$
Einsetzen liefert:
$b^2 = (c \bullet \sin\beta)^2 + (a - c \bullet \cos\beta)^2$
$b^2 = c^2 \bullet \sin^2\beta + a^2 - 2ac \bullet \cos\beta + c^2 \bullet \cos^2\beta$
$b^2 = c^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + a^2 - 2ac \bullet \cos\beta \qquad |\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \bullet \cos\beta$
$\rightarrow \cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$

Gegeben sei nun folgendes Dreieck ABC (siehe Abbildung 29) mit der Ecktransversalen d auf $X \in a$, die die Seite a in die zwei Teilstrecken
$BX = e$ und $XC = f$ teilt.
Wir wenden diesen Satz auf das Dreieck BXA und auf das Dreieck XCA an.

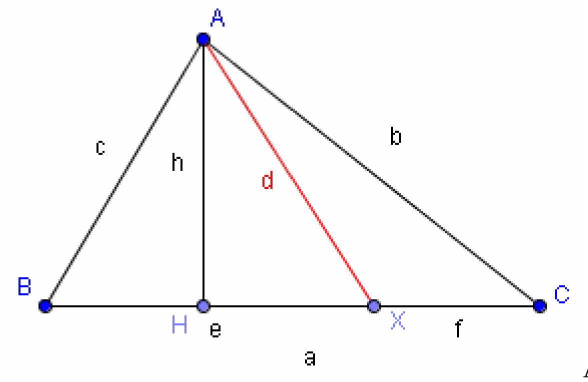


Abb. 29

weil Gegenwinkel ($\measuredangle X_{links} = 180° - \measuredangle X_{rechts}$):

$$\frac{e^2 + d^2 - b^2}{2ed} = -\frac{f^2 + d^2 - b^2}{2fd}$$

$$\Leftrightarrow 2fd(e^2 + d^2 - b^2) = -2ed(f^2 + d^2 - b^2) \quad |:2|:p| + ed| + c^2 f$$

$$\Leftrightarrow e^2 f + ef^2 + ed^2 + fd^2 = b^2 e + c^2 f$$

$$\Leftrightarrow (e+f)(d^2 + ef) = b^2 e + c^2 f$$

$$\Leftrightarrow a(d^2 + ef) = b^2 e + c^2 f$$

q.e.d.