1.) Allgemeine Berechnung des Extremwertes eines Zylinders

Schritt 1: Bestimmen der Zielfunktion und Nebenbedingung

Zielfunktion $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
Nebenbedingung $V = \pi r^2 h$

Schritt 2: Nebenbedingung umstellen nach h

$h = V/\pi r^2$

Schritt 3: h einsetzen in die Zielfunktion und ableiten

$O(r) = 2\pi r^2 + 2V/r$

$O'(r) = 4\pi r - 2V/r^2$
$O''(r) = 4\pi + 4V/r^3$

Schritt 4: Notwendige Bedingung O'(r) = 0

$O'(r) = 0$

$0 = 4\pi r - 2V/r^2$
$4\pi r = 2V/r^2$ /$*r^2$
$r^3 = 2V/4\pi$
$\underline{r = \sqrt[3]{V/2\pi}}$

$h = V/\pi(\sqrt[3]{V/2\pi})^2$ /r einsetzen in $h = V/\pi r^2$
/ (Weg bitte mitnotieren)

$\underline{h = \sqrt[3]{4V/\pi} = 2r}$

$O(\sqrt[3]{V/2\pi}) = \sqrt[3]{2\pi V^2} + \sqrt[3]{16\pi V^2}$ /r einsetzen in die Zielfkt.
$O(\sqrt[3]{V/2\pi}) = 3*\sqrt[3]{2\pi V^2}$ /Zusammenfassung

$O''(\sqrt[3]{V/2\pi}) = 3*\sqrt[3]{2\pi V^2} > 0$ /r einsetzen in 2. Ableitung
➔ ist rel. Minimum

Schritt 5: Berechnung der Ränder

$r \to 0 \Rightarrow O(r) \to \infty$
$r \to \infty \Rightarrow O(r) \to \infty$ ➔ ist abs. Minimum.

2.) Spezifische Berechnung des Extremwertes einer „Bonduelle"-Dose

Herstellerangabe: Volumen = $471{,}05 cm^3$

Schritt 4:

$O'(r) = 0$

$r^3 = V/2\pi$ /auflösen
$r = \sqrt[3]{V/2\pi}$ /einsetzen
$r = \sqrt[3]{471{,}05\ cm^3/2\pi}$
$r = 4{,}2166$ → **r = 4,2 cm**

aus Schritt 2.):

$h = V/\pi r^2$ /einsetzen
$h = 471{,}05\ cm^3/\pi(4{,}2\ cm)^2$
$h = 8{,}4999$ → **h = 8,5 cm**

jetzt in die Zielfunktion einsetzen:

$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
$O = 2\pi(4{,}2\ cm)^2 + 2\pi(4{,}2\ cm)(8{,}5\ cm)$
$O = 335{,}145\ cm^2$

Einsetzen in O'', zur Berechnung des relativen Minimums

$O''(r) = 4\pi + 4V/r^3$
$O''(r) = 4\pi + 4(471{,}05\ cm)/(4{,}2\ cm)^3$
$O''(r) = 37{,}9983$ → **O'' > 0 = relatives Minimum**

Schritt 5:

$r \to 0 \Rightarrow O(r) \to \infty$
$r \to \infty \Rightarrow O(r) \to \infty$ → ist abs. Minimum.

Somit gilt: **$O = 335{,}145\ cm^2$ → absolutes Minimum**

Das gegebene Volumen $471{,}05\ cm^3$ kann im besten Fall mit $335{,}145\ cm^2$ Blech verpackt werden.

Quellen: Formelsammlung (S.34); Mathematik-Buch (Klasse 12);