

1.) Allgemeine Berechnung des Extremwertes eines Zylinders

Schritt 1: Bestimmen der Zielfunktion und Nebenbedingung

$$\begin{array}{ll} \text{Zielfunktion} & O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ \text{Nebenbedingung} & V = \pi r^2 h \end{array}$$

Schritt 2: Nebenbedingung umstellen nach h

$$h = V/\pi r^2$$

Schritt 3: h einsetzen in die Zielfunktion und ableiten

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2V/r$$

$$\begin{array}{l} O'(r) = 4\pi r - 2V/r^2 \\ O''(r) = 4\pi + 4V/r^3 \end{array}$$

Schritt 4: Notwendige Bedingung $O'(r) = 0$

$$O'(r) = 0$$

$$\begin{array}{l} 0 = 4\pi r - 2V/r^2 \\ 4\pi r = 2V/r^2 \quad / * r^2 \\ r^3 = 2V/4\pi \\ \underline{r = \sqrt[3]{V/2\pi}} \end{array}$$

$$h = V/\pi(\sqrt[3]{V/2\pi})^2 \quad \begin{array}{l} /r \text{ einsetzen in } h = V/\pi r^2 \\ /(\text{Weg bitte mitnotieren}) \end{array}$$

$$\underline{h = \sqrt[3]{4V/\pi} = 2r}$$

$$\begin{array}{l} O(\sqrt[3]{V/2\pi}) = \sqrt[3]{2\pi V^2} + \sqrt[3]{16\pi V^2} \\ O(\sqrt[3]{V/2\pi}) = 3 * \sqrt[3]{2\pi V^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} /r \text{ einsetzen in die Zielfkt.} \\ /Zusammenfassung \end{array}$$

$$O''(\sqrt[3]{V/2\pi}) = 3 * \sqrt[3]{2\pi V^2} > 0 \quad \begin{array}{l} /r \text{ einsetzen in 2. Ableitung} \\ \rightarrow \text{ist rel. Minimum} \end{array}$$

Schritt 5: Berechnung der Ränder

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow O(r) \rightarrow \infty$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow O(r) \rightarrow \infty$$

\rightarrow ist abs. Minimum.

2.) Spezifische Berechnung des Extremwertes einer „Bonduelle“-Dose



Herstellerangabe: Volumen = $471,05 \text{ cm}^3$

Schritt 4:

$$O'(r) = 0$$

$$r^3 = V/2\pi$$

/auflösen

$$r = \sqrt[3]{V/2\pi}$$

/einsetzen

$$r = \sqrt[3]{471,05 \text{ cm}^3/2\pi}$$

$$r = 4,2166 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r = 4,2 \text{ cm}}$$

aus Schritt 2.):

$$h = V/\pi r^2$$

/einsetzen

$$h = 471,05 \text{ cm}^3/\pi(4,2 \text{ cm})^2$$

$$h = 8,4999 \quad \rightarrow \quad \mathbf{h = 8,5 \text{ cm}}$$

jetzt in die Zielfunktion einsetzen:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$O = 2\pi(4,2 \text{ cm})^2 + 2\pi(4,2 \text{ cm})(8,5 \text{ cm})$$

$$\mathbf{O = 335,145 \text{ cm}^2}$$

Einsetzen in O'' , zur Berechnung des relativen Minimums

$$O''(r) = 4\pi + 4V/r^3$$

$$O''(r) = 4\pi + 4(471,05 \text{ cm})/(4,2 \text{ cm})^3$$

$$O''(r) = 37,9983 \quad \rightarrow \quad \mathbf{O'' > 0 = \text{relatives Minimum}}$$

Schritt 5:

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow O(r) \rightarrow \infty$$

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow O(r) \rightarrow \infty$$

\rightarrow ist abs. Minimum.

Somit gilt: **$O = 335,145 \text{ cm}^2 \rightarrow$ absolutes Minimum**

Das gegebene Volumen $471,05 \text{ cm}^3$ kann im besten Fall mit $335,145 \text{ cm}^2$ Blech verpackt werden.