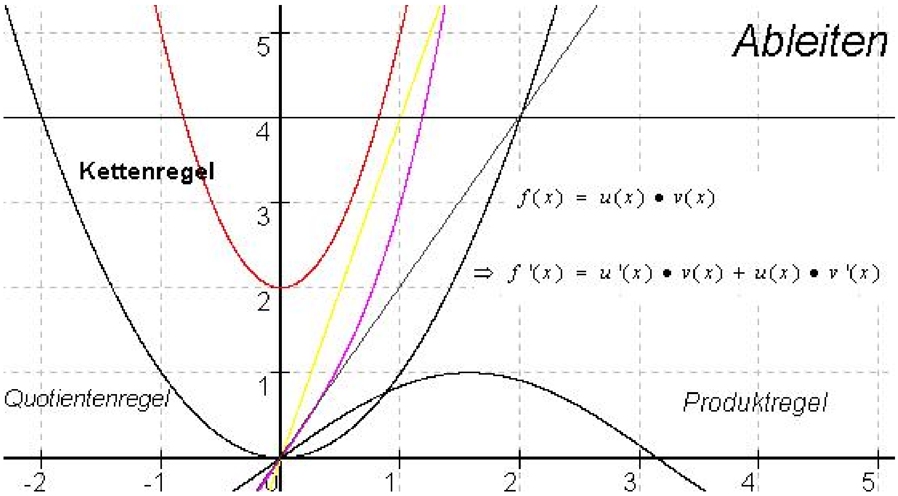
50-Ableitungsbeispiele für Funktionen

Georg Lauenstein

24. August 2006



e-mail: **lauenste@math.hu-berlin.de**

Thema: 50 - Ableitungsbeispiele für Funktionen

- Übersicht der Aufgaben
- Ganzrationale Funktionen
- Gebrochenrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Logarithmusfunktionen
- Wurzelfunktionen

Vorwort:

Mit diesem Artikel möchte ich dem Schüler das Ableiten von verschiedenen Funktionen, die in der Schule behandelt werden, erläutern. Der Artikel kann als Übungsvorlage oder auch für einen "kurzen Blick" vor einer Klausur verwendet werden.
Was nun folgt, ist keine kurze Übersicht zum obigen Thema, sondern ich werde versuchen den kompletten Rechenweg mit den nötigen Erklärungen zu zeigen. Ich möchte noch hinzufügen, dass dies mein erster Artikel ist, den ich vor anderen präsentiere. Also bitte habt Nachsicht, wenn nicht gleich alles stimmt.
So und nun viel Spass beim Lesen und Rechnen.

Übersicht der Aufgaben:

1) $f(x) = 0,04x^4 - x^2 + 0,96, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = -0,5x \cdot (x^2 - 2)$

3) $f(x) = 0,75x^4 - 4x^3 + 6x^2$

4) $f(x) = (4x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + 3x + 5)$

5) $f_a(x) = a \cdot x^4 - (a+1) \cdot x^2 + 1, \quad a > 0; x, a \in \mathbb{R}$

6) $f_a(x) = \frac{x^3}{a} + 2x^2 + ax \qquad x, a \in \mathbb{R}; a > 0$

7) $f_a(x) = (ax - 1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$

8) $f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - t^2 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot t^3$

9) $f_t(x) = \frac{1}{2t} \cdot x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2} \cdot tx$

10) $f_k(x) = \frac{6}{k^2} \cdot x^3 - \frac{12}{k} \cdot x^2 + 6x$

11) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

12) $f(x) = \frac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$

13) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 9}$

14) $f_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

15) $f_t(x) = \frac{4x + 8}{x^2 + t}$

16) $f_t(x) = \frac{t^2 - x^2}{x - 2t}$

17) $f_t(x) = \frac{x^2}{(x+t)^2}$

18) $f_a(x) = \frac{x^3 + 32a^3}{ax^2}$

19) $f_k(x) = \frac{4kx}{x^2 + k^2}$

20) $f_t(x) = \frac{3}{x^2 + 3x + t}$

21) $f(x) = (x-2) \cdot e^x$

22) $f_a(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$

23) $f_t(x) = t \cdot (x+t) \cdot e^{-\frac{x}{t}} \implies f_t(x) = (t \cdot x + t^2) \cdot e^{-\frac{x}{t}}$

24) $f_t(x) = (x^2 - \frac{2}{t} \cdot x) \cdot e^{tx}$

25) $f_a(x) = 10x \cdot e^{-ax^2}$

26) $f(x) = \frac{2 \cdot e^x - 4}{e^x + 1}$

27) $f_k(x) = \frac{2 \cdot e^x}{e^x - k}$

28) $f_t(x) = \frac{e^x - t}{e^x + t}$

29) $f_a(x) = e^x \cdot \left(\frac{ax+1}{ax^3} \right)$

30) $f_a(x) = x \cdot e^{-ax^2+1}$

31) $f(x) = ln(2x-4)$

32) $f(x) = x^2 \cdot ln(1-x)$

33) $f(x) = ln(6x - x^2)$

34) $f_a(x) = ln(x) \cdot (x-a)$

35) $f(x) = x \cdot ln(x-4)$

36) $f(x) = ln \left(\frac{x^2-4}{x^2} \right)$

37) $f_a(x) = ln \left(\frac{1}{ax+b} \right) \quad a, b \neq 0 \in \mathbb{R}$

38) $f(x) = ln(3+x) - ln(3-x)$

39) $f_a(x) = x \cdot ln \left(\frac{x^2}{a} \right)$

40) $f(x) = \frac{2 + ln(x)}{x^2}$

41) $f(x) = (x-5) \cdot \sqrt{x}$

42) $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}$

43) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$

44) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

45) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+25}$

46) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

47) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

48) $f_a(x) = 3xa \cdot \sqrt{x+1}$

49) $f_k(x) = x \cdot \sqrt{k-2x}$

50) $f(x) = x \cdot \sqrt{16-x^2}$

1) Ganzrationale Funktionen:

Eine ganzrationale Funktion ist durch folgende Darstellung charakterisiert:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

Man nennt ihren Funktionsterm auch ein Polynom.
Die größte Hochzahl bzw. der größte Exponent n heißt Grad der Funktion. Ein Spezialfall ist die Funktion 2. Grades, besser auch bekannt als quadratische Funktion, deren Funktionsgraph man Parabel nennt.
Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen, $n-1$ Extremwerte und $n-2$ Wendestellen.

1) $f(x) = 0,04x^4 - x^2 + 0,96, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,16x^3 - 2x \\ f''(x) &= 0,48x^2 - 2 \\ f'''(x) &= 0,96x \end{aligned}$$

Erklärung: Hier nochmal kurz zur Erinnerung die Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \textit{Potenzregel:} \quad & f(x) = x^n \quad \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \\ \textit{Konstantenregel:} \quad & f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \textit{Summenregel:} \quad & f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) \\ \textit{Faktorregel:} \quad & f(x) = c \cdot g(x), c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Nun erläutere ich das nochmal genauer an diesem ersten Beispiel.
Wir benutzen dazu die **Potenz** und **Konstantenregel**
und betrachten jeden Term einzelnd.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0,04x^4 - x^2 + 0,96 \\
g(x) &= 0,04x^4 \\
g'(x) &= 4 \cdot 0,04x^{4-1} \\
g'(x) &= 0,16x^3 \\
\\
h(x) &= x^2 \\
h'(x) &= 2 \cdot x^{2-1} \\
h'(x) &= 2x \\
\\
k(x) &= 0,96 \\
k'(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Das ganze zusammen ergibt dann:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) + k'(x)$$

$$f'(x) = 0,16x^3 - 2x + 0$$

Dies wiederholt sich auch bei den weiteren Ableitungen.

Nach diesem ausführlichen Beispiel folgen nun weitere.
2) $f(x) = -0,5x \cdot (x^2 - 2)$

Hier sehen wir ein Produkt, das wir ausmultipliziert ableiten können oder wir benutzen eine weitere Ableitungsregel.
Ich werde nun beide Wege ausführlich zeigen.

$$f(x) = -0,5x^3 + x$$
$$f'(x) = -1,5x^2 + 1$$
$$f''(x) = -3x$$

Das ist der erste Weg bzw. die erste Möglichkeit, die Ableitung dieser Funktion zu bestimmen.
Wie ich oben schon erwähnt habe, können wir auch eine weitere Ableitungsregel verwenden.
Das ist die **Produktregel**

Ich werde sie nun nochmal kurz hinschreiben,
den Beweis findet ihr in anderen Artikeln.
Aus $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
kurz: $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$
An unserem Beispiel sieht es dann wie folgt aus:

$$f(x) = -0,5x \cdot (x^2 - 2)$$
$$u = -0,5x$$
$$u' = -0,5$$
$$v = x^2 - 2$$
$$v' = 2x$$

Jetzt einfach die Formel anwenden:

$$f'(x) = -0,5 \cdot (x^2 - 2) + (-0,5x) \cdot 2x$$
$$f'(x) = -0,5x^2 + 1 - x^2$$
$$f'(x) = -1,5x^2 + 1$$

Nun haben wir mit einfachen Mitteln auf zwei Wegen die erste Ableitung dieser Funktion bestimmt.

3) $\quad f(x) = 0,75x^4 - 4x^3 + 6x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^3 - 12x^2 + 12x \\ f''(x) &= 9x^2 - 24x + 12 \\ f'''(x) &= 18x - 24 \end{aligned}$$

4) $\quad f(x) = (4x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + 3x + 5)$

1.Weg mit der Produktregel:
$u = 4x^2 + x - 1 \quad u' = 8x + 1$
$v = x^2 + 3x + 5 \quad v' = 2x + 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ f'(x) &= (8x+1) \cdot (x^2 + 3x + 5) + (4x^2 + x - 1) \cdot (2x + 3) \\ f'(x) &= 8x^3 + 24x^2 + 40x + x^2 + 3x + 5 + 8x^3 + 12x^2 + 2x^2 - 2x + 3x - 3 \\ f'(x) &= 16x^3 + 39x^2 + 44x + 2 \end{aligned}$$

2.Weg:

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + 3x + 5), && \text{(ausmultiplizieren)} \\ f(x) &= 4x^4 + 12x^3 + 20x^2 + x^3 + 3x^2 + 5x - x^2 - 3x - 5 \\ f'(x) &= 16x^3 + 39x^2 + 44x + 2 \end{aligned}$$

Wie man gut erkennen kann, hat man mehere Möglichkeiten eine Funktion abzuleiten, die aus einem zusammengesetzten Produkt besteht.
Es ist euch überlassen welche Methode ihr verwendet.

5) $f_a(x) = a \cdot x^4 - (a+1) \cdot x^2 + 1, \quad a > 0; x, a \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= a \cdot x^4 - a \cdot x^2 - x^2 + 1 \\
{f_a}'(x) &= 4ax^3 - 2ax - 2x \\
{f_a}''(x) &= 12ax^2 - 2a - 2 \\
{f_a}'''(x) &= 24ax
\end{aligned}
$$

6) $f_a(x) = \dfrac{x^3}{a} + 2x^2 + ax \qquad x, a \in \mathbb{R}; a > 0$

$$
\begin{aligned}
{f_a}'(x) &= \frac{3x^2}{a} + 4x + a \\
{f_a}''(x) &= \frac{6x}{a} + 4 \\
{f_a}'''(x) &= \frac{6}{a}
\end{aligned}
$$

7) $f_a(x) = (ax - 1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$

$$
\begin{aligned}
{f_a}'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
u &= ax - 1 \\
u' &= a \\
v &= x^2 + 5x + 6 \\
v' &= 2x + 5 \\
{f_a}'(x) &= a \cdot (x^2 + 5x + 6) + (ax - 1) \cdot (2x + 5) \\
{f_a}'(x) &= ax^2 + 5ax + 6a + 2ax^2 + 5ax - 2x - 5 \\
{f_a}'(x) &= 3ax^2 + 2 \cdot (5a - 1)x + 6a - 5
\end{aligned}
$$

8) $f_t(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 - t^2 \cdot x + \dfrac{2}{3} \cdot t^3$

$$
\begin{aligned}
{f_t}'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^2 - t^2 = x^2 - t^2 \\
{f_t}''(x) &= 2x \\
{f_t}'''(x) &= 2
\end{aligned}
$$

9) $f_t(x) = \frac{1}{2t} \cdot x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2} \cdot tx$

$$\begin{aligned}
{f_t}'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{2t} \cdot x^2 - 6x + \frac{9}{2} \cdot t \\
{f_t}'(x) &= \frac{3}{2t} \cdot x^2 - 6x + \frac{9}{2} \cdot t \\
{f_t}''(x) &= \frac{6}{2t} \cdot x - 6 = \frac{3}{t} \cdot x - 6 \\
{f_t}'''(x) &= \frac{3}{t}
\end{aligned}$$

Man kann auch seine Ableitungen kontrollieren,
indem man die Stammfunktion von der Ableitung bildet.

$$\begin{aligned}
f_t'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{2t} \cdot x^2 - 6x + \frac{9}{2} \cdot t \\
F_t(x) &= \frac{3}{2t} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^3\right) - 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right) + \frac{9}{2} \cdot t \cdot x \\
F_t(x) &= \frac{3}{6t} \cdot x^3 - \frac{6}{2} \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot t \cdot x \\
F_t(x) &= \frac{1}{2t} \cdot x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2} \cdot t \cdot x \\
F_t(x) &= f_t(x) \quad \text{wahre Aussage}
\end{aligned}$$

10) $f_k(x) = \frac{6}{k^2} \cdot x^3 - \frac{12}{k} \cdot x^2 + 6x$

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= 3 \cdot \frac{6}{k^2} \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{12}{k} \cdot x + 6 \\
f_k'(x) &= \frac{18}{k^2} \cdot x^2 - \frac{24}{k} \cdot x + 6
\end{aligned}$$

2) Gebrochenrationale Funktionen:

Sind $u(x)$ und $v(x)$ ganzrationale Funktionen,
dann heißt die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}; \qquad v(x) \neq 0$$

eine gebrochenrationale Funktion. Der Funktionsterm ist ein Bruch mit einer Zählerfunktion $u(x)$ und einer Nennerfunktion $v(x)$.
Der größtmögliche Definitionsbereich einer solchen Funktion ist in vielen Fällen nicht die ganze Menge $\mathbb{R}$, da im Nenner eines Bruches nicht 0 stehen darf. Also müssen alle Nullstellen der Funktion $v(x)$ aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden. Dadurch ergeben sich Definitonslücken. Wenn eine Nullstelle des Nenners $v(x)$ gleichzeitig auch Nullstelle des Zählers $u(x)$ ist, so handelt es sich um eine hebbare Definitionslücke.
Wenn dieses nicht der Fall ist, so liegt eine Polstelle mit senkrechter Asymptote vor.
Dies war eine kleine Einführung zum 2. Teil meines Artikels.
Nun folgen wieder 10 unterschiedlich schwere Aufgaben, zu denen ich jeweils die ersten zwei oder drei Ableitungen ausführlich berechnen werde.

11) $\qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

Die Ableitungen von gebrochenrationalen Funktionen werden mithilfe der Quotientenregel gebildet.In diesem ersten Beispiel bezeichnen wir unsere Aufgabe mal ganz formal so:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$u(x) = \text{Zählerfunktion} \qquad v(x) = \text{Nennerfunktion}$$

Die *Quotientenregel* lautet dann so:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Das sieht auf den ersten Blick vielleicht für den ein oder anderen kompliziert aus, aber es ist ganz einfach. Das kann man natürlich auch wieder beweisen, aber wie ich oben schon erwähnt habe, gibt es dazu auch wieder einen tollen Artikel von Florian.

Unser Beispiel war: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$u = 1 \qquad u' = 0 \qquad v = x^2 - 9 \qquad v' = 2x$

Wie ich darauf komme, zeige ich nicht nochmal, weil das kann man oben nachvollziehen.
Berechnen wir jetzt die erste Ableitung.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 9) - 1 \cdot (2x)}{(x^2 - 9)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 9)^2}$$

Das war die erste Ableitung. Die weiteren berechnen sich genauso, nur dass die Kettenregel nun eine Rolle spielt Nach der ersten Ableitung wird in der Regel immer ausgeklammert und danach im Nenner gekürzt, was man nun in der zweiten Ableitung sehen kann

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x^2 - 9)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4}$$

Erklärung:

$g(x) = (x^2 - 9)^2 \qquad |$ Kettenregel

$g'(x) = 2 \cdot (x^2 - 9)^1 \cdot 2x$

$g'(x) = 4x \cdot (x^2 - 9)$

Merke: äußere mal innere Ableitung!

Wie ich oben schon erwähnt habe, wird nun ausgeklammert!

$$f''(x) = \frac{(x^2-9)\left[(-2\cdot(x^2-9)-(-2x)\cdot 4x)\right]}{(x^2-9)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2+18+8x^2}{(x^2-9)^3}$$

Bemerkung: (x^2-9) **wurde einmal mit dem Nenner gekürzt, deswegen steht im Nenner** $(x^2-9)^3$

$$\Longrightarrow f''(x) = \frac{6x^2+18}{(x^2-9)^3}$$

Dieses Schema geht auch analog für die dritte Ableitung.

$$\Longrightarrow f'''(x) = \frac{12x\cdot(x^2-9)^3-(6x^2+18)\cdot 3\cdot(x^2-9)^2\cdot 2x}{(x^2-9)^6}$$

Bemerkung: $((x^2-9)^3)^2 = (x^2-9)^{3\cdot 2} = (x^2-9)^6 \Longleftarrow$ ***Potenzgesetze***

$$\Longrightarrow f'''(x) = \frac{(x^2-9)^2\left[(12x\cdot(x^2-9)-(6x^2+18)\cdot 6x)\right]}{(x^2-9)^6}$$

$(x^2-9)^2$ **wird ausgeklammert!**

$$\Longrightarrow f'''(x) = \frac{12x^3-108x-36x^3-108x}{(x^2-9)^4}$$

$(x^2-9)^2$ **wird 2 mal im Nenner gekürzt und der Zähler weiter zusammengefasst!**

$$\Longrightarrow f'''(x) = \frac{-24x^3-216x}{(x^2-9)^4}$$

Puuh, das war ganz schön viel, jedoch sieht man ein Lösungsschema, nämlich Formel anwenden, zusammenfassen und eventuell ausklammern und wenn man genug Aufgaben rechnet, fällt es einem dann leicht, wie auch andere Sache im Leben.

12) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$u = 3x^2 - 8x \qquad u' = 6x - 8$

$v = (x-2)^2 \qquad v' = 2 \cdot (x-2) \cdot 1$

$$f'(x) = \frac{(6x-8) \cdot (x-2)^2 - (3x^2 - 8x) \cdot 2(x-2) \cdot 1}{(x-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)\left[(6x-8) \cdot (x-2) - (3x^2-8x) \cdot 2\right]}{(x-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 12x - 8x + 16 - 6x^2 + 16x}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x-2)^3 - (-4x+16) \cdot 3 \cdot (x-2)^2 \cdot 1}{(x-2)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(x-2)^2 \left[-4 \cdot (x-2) - (-4x+16) \cdot 3\right]}{(x-2)^6}$$

$$f''(x) = \frac{-4x + 8 + 12x - 48}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{8x - 40}{(x-2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{8 \cdot (x-2)^4 - (8x-40) \cdot 4 \cdot (x-2)^3 \cdot 1}{(x-2)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{(x-2)^3 \left[8 \cdot (x-2) - (8x-40) \cdot 4\right]}{(x-2)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{8x - 16 - 32x + 160}{(x-2)^5}$$

$$f'''(x) = \frac{-24x + 144}{(x-2)^5}$$

13) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 9}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x) \cdot (x^2 - 9) - (x^3 - 4x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 27x^2 - 8x^3 + 72x - 2x^4 + 8x^3}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 27x^2 + 72x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 54x + 72) \cdot (x^2 - 9)^2 - (x^4 - 27x^2 + 72x) \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 9)\left[(4x^3 - 54x + 72) \cdot (x^2 - 9) - (x^4 - 27x^2 + 72x) \cdot 4x\right]}{(x^2 - 9)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4x^5 - 54x^3 + 72x^2 - 36x^3 + 486x - 648 - 4x^5 + 108x^3 - 288x^2}{(x^2 - 9)^3}$$

$$f''(x) = \frac{18x^3 - 216x^2 + 486x - 648}{(x^2 - 9)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(54x^2 - 432x + 486) \cdot (x^2 - 9)^3 - (18x^3 - 216x^2 + 486x - 648) \cdot 3(x^2 - 9)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{54x^4 - 486x^2 - 432x^3 + 3888x + 486x^2 - 4374 - 108x^4 + 1296x^3 - 2916x^2 + 3888x}{(x^2 - 9)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-54x^4 + 864x^3 - 2916x^2 + 7776x - 4374}{(x^2 - 9)^4}$$

14) $f_a(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

$$f_a'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + a^2) - (x^2 - a^2) \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{2x^3 + 2xa^2 - 2x^3 + 2xa^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{4xa^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$f_a''(x) = \frac{(4a^2) \cdot (x^2 + a^2)^2 - (4xa^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + a^2) \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$f_a''(x) = \frac{(4a^2) \cdot (x^2 + a^2) - (4xa^2) \cdot 4x}{(x^2 + a^2)^3}$$

$$f_a''(x) = \frac{4a^2 \cdot x^2 + 4a^4 - 16a^2 \cdot x^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

$$f_a''(x) = \frac{4a^4 - 12a^2 \cdot x^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

15) $f_t(x) = \dfrac{4x + 8}{x^2 + t}$

$$f_t'(x) = \frac{4 \cdot (x^2 + t) - (4x + 8) \cdot 2x}{(x^2 + t)^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{4x^2 + 4t - 8x^2 - 16x}{(x^2 + t)^2}$$

$$f_t'(x) = \frac{-4x^2 - 16x + 4t}{(x^2 + t)^2}$$

$$f_t''(x) = \frac{(-8x - 16) \cdot (x^2 + t)^2 - (-4x^2 - 16x + 4t) \cdot 2 \cdot (x^2 + t) \cdot 2x}{(x^2 + t)^4}$$

$$f_t''(x) = \frac{-8x^3 - 8xt - 16x^2 - 16t + 16x^3 + 64x^2 - 16xt}{(x^2 + t)^3}$$

$$f_t''(x) = \frac{8x^3 + 48x^2 - 24xt - 16t}{(x^2 + t)^3}$$

Das Ausklammern schreibe ich jetzt nicht mehr hin, nach ein paar Beispielen sieht man das und man kann sich den Platz einsparen.

16) $f_t(x) = \dfrac{t^2 - x^2}{x - 2t}$

$$f_t{}'(x) = \frac{-2x \cdot (x-2t) - (t^2 - x^2) \cdot 1}{(x-2t)^2}$$
$$f_t{}'(x) = \frac{-2x^2 + 4xt - t^2 + x^2}{(x-2t)^2}$$
$$f_t{}'(x) = \frac{-x^2 + 4xt - t^2}{(x-2t)^2}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{(-2x+4t) \cdot (x-2t)^2 - (-x^2 + 4xt - t^2) \cdot 2(x-2t) \cdot 1}{(x-2t)^4}$$
$$f_t{}''(x) = -\frac{6t^2}{(x-2t)^3}$$

17) $f_t(x) = \dfrac{x^2}{(x+t)^2}$

$$f_t{}'(x) = \frac{2x \cdot (x+t)^2 - x^2 \cdot 2 \cdot (x+t)}{(x+t)^4}$$
$$f_t{}'(x) = \frac{2x^2 + 2xt - 2x^2}{(x+t)^3}$$
$$f_t{}'(x) = \frac{2xt}{(x+t)^3}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{2t \cdot (x+t)^3 - 2xt \cdot 3 \cdot (x+t)^2}{(x+t)^6}$$
$$f_t{}''(x) = \frac{2tx + 2t^2 - 6xt}{(x+t)^4}$$
$$f_t{}''(x) = \frac{2t^2 - 4xt}{(x+t)^4}$$

18) $f_a(x) = \dfrac{x^3 + 32a^3}{ax^2}$

$$f_a{}'(x) = \frac{3x^2 \cdot ax^2 - (x^3 + 32a^3) \cdot 2ax}{(a^2 \cdot x^4)}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{3ax^4 - 2ax^4 - 64a^4 \cdot x}{(a^2 \cdot x^4)}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{ax^4 - 64a^4 \cdot x}{(a^2 \cdot x^4)}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{ax^4}{a^2 \cdot x^4} - \frac{64a^4 \cdot x}{a^2 \cdot x^4}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{1}{a} - \frac{64a^2}{x^3}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{x^3 - 64a^3}{ax^3}$$

$$f_a{}''(x) = \frac{192a^2}{x^4}$$

19) $f_k(x) = \dfrac{4kx}{x^2 + k^2}$

$$f_k{}'(x) = \frac{4k \cdot (x^2 + k^2) - 4kx \cdot 2x}{(x^2 + k^2)^2}$$

$$f_k{}'(x) = \frac{4kx^2 + 4k^3 - 8kx^2}{(x^2 + k^2)^2}$$

$$f_k{}'(x) = \frac{-4kx^2 + 4k^3}{(x^2 + k^2)^2}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{-8kx \cdot (x^2 + k^2)^2 - (-4kx^2 + 4k^3) \cdot 2 \cdot (x^2 + k^2) \cdot 2x}{(x^2 + k^2)^4}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{-8kx^3 - 8k^3 \cdot x + 16kx^3 - 16k^3 \cdot x}{(x^2 + k^2)^3}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{8kx^3 - 24k^3 \cdot x}{(x^2 + k^2)^3}$$

20) $\quad f_t(x) = \dfrac{3}{x^2+3x+t}$

$$f_t{}'(x) = \frac{0 \cdot (x^2+3x+t) - 3 \cdot (2x+3)}{(x^2+3x+t)^2}$$

$$f_t{}'(x) = \frac{-6x-9}{(x^2+3x+t)^2}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{-6 \cdot (x^2+3x+t)^2 - (-6x-9) \cdot 2 \cdot (x^2+3x+t) \cdot (2x+3)}{(x^2+3x+t)^4}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{-6x^2-18x-6t-(-6x-9)\cdot(4x+6)}{(x^2+3x+t)^3}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{-6x^2-18x-6t-(-24x^2-36x-36x-54)}{(x^2+3x+t)^3}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{-6x^2-18x-6t+24x^2+36x+36x+54}{(x^2+3x+t)^3}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{18x^2+54x-6t+54}{(x^2+3x+t)^3}$$

3) Exponentialfunktionen:

Exponential-und Logarithmusfunktionen bilden die mathematische Grundlage zur Beschreibung von exponentiellen Wachstums- und Zufallsprozessen (z.B. Radioaktivität, Kapitalverzinsung).
Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist dadurch charakterisiert, dass bei Zunahme des x-Werts um einen Wert y der Funktionswert $f(x)$ mit dem entsprechenden Faktor $f(y)$ vervielfacht wird.
Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, deswegen habe ich es auch zusammengefügt.
Zwischen Logarithmus- und Exponentialfunktion gilt folgende Beziehung:
$y = e^x \iff x = ln(y)$
also: $y = e^x$ nun wendet man den Logarithmus an

$ln(y) = ln(e)(x)$ $ln(e)$ hebt sich auf, weil das 1 ist, deswegen folgt

$ln(y) = x$

Die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ ist auf der ganzen Menge $\mathbb{R}$ definiert, ihre Funktionswerte sind immer größer als 0.
Nun beginnen wir wieder mit dem Rechnen. Ich hoffe, die Einführung war nicht zu schwammig.

Meistens wird die Produkt- und Kettenregel verwendet:
Merke:

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = e^{u(x)} \Longrightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Beispiele:
$f(x) = e^{2x} \Longrightarrow f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \Longrightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$
$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 4 \cdot e^{2x}$
$f'''(x) = 4 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 8 \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = e^{16x} \Longrightarrow f'(x) = e^{16x} \cdot 16 = 16 \cdot e^{16x}$

c) $f(x) = e^{0,5-2x} \Longrightarrow f'(x) = e^{0,5-2x} \cdot 0,5 = 0,5 \cdot e^{0,5-2x}$

Na, was aufgefallen? Auf den ersten Blick sieht es doch ganz gut aus, jedoch ist es falsch!! Richtig wäre:

$f(x) = e^{0{,}5-2x} \Longrightarrow f'(x) = e^{0{,}5-2x} \cdot (-2) \Longrightarrow f'(x) = -2 \cdot e^{0{,}5-2x}$

Manche Lehrer verdrehen es einfach, um die Schüler zu verwirren :) Also immer schön gucken, was da steht dann ist auch wieder ganz einfach zu lösen.

Verbinden wir nun die **Produkt- und Kettenregel:**
Es folgen nun wie gewohnt 10 Rechenbeispiele mit immer höheren Schwierigkeitsgrad.

21) $f(x) = (x-2) \cdot e^x$

$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u = x - 2 \implies u' = 1; \qquad v = e^x \implies v' = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x$

$f'(x) = e^x \cdot (1 + (x-2)) = e^x \cdot (x-1)$

$f''(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1$

$f''(x) = e^x \cdot (x-1+1) = e^x \cdot x$

$f'''(x) = e^x \cdot x + e^x \cdot 1 = e^x \cdot (x+1)$

Merke: Nach Anwenden der Produktregel wird ausgeklammert $\frac{e^x}{e^x} = 1$

Das sieht dann so aus:
$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x \qquad \textit{ausmultiplizieren}$

$\Longrightarrow f'(x) = e^x + x \cdot e^x - 2 \cdot e^x \qquad e^x\,\textit{ausklammern}$

$\Longrightarrow f'(x) = e^x \cdot (1 + x - 2) \Longrightarrow f'(x) = e^x \cdot (x-1)$

Mit ein bisschen Übung kann man sich dann das Ausmultiplizieren sparen, wobei bei komplexen Aufgaben es doch gut ist, da man sonst schnell den Überblick verliert. Dasselbe für die zweite Ableitung:

$\Longrightarrow f''(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1 \Longrightarrow f''(x) = x \cdot e^x - e^x + e^x \;\; \Longrightarrow f''(x) = e^x \cdot (x-1+1) = e^x \cdot x$

Und jetzt dritte Ableitung:

$f'''(x) = e^x \cdot x + e^x \cdot 1 = x \cdot e^x + e^x = e^x \cdot (x+1)$

Ich werde die nächsten 2 Aufgaben mit 2 Wegen zeigen also einmal mit Ausmultiplizieren und anschließend Ausklammern und einmal ohne mit gleich Ausklammern.

22) $f_a(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$

1.Weg:

$f_a{}'(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} + ax \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (-x)$

$f_a{}'(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$

$f_a{}'(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (a - ax^2)$

2.Weg:

$f_a{}'(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} + ax \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (-x)$

$f_a{}'(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (a - ax^2)$

$f_a{}'(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (1 - x^2)$

$f_a{}''(x) = -x \cdot a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (1 - x^2) + a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (-2x)$

$f_a{}''(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (-x + x^3 - 2x)$

$f_a{}''(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} \cdot (-3x + x^3)$

$f_a{}''(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} x \cdot (x^2 - 3)$

23) $f_t(x) = t \cdot (x+t) \cdot e^{-\frac{x}{t}} \;\; \Longrightarrow f_t(x) = (t \cdot x + t^2) \cdot e^{-\frac{x}{t}}$

$f_t{}'(x) = t \cdot e^{-\frac{x}{t}} + (tx + t^2) \cdot (-\frac{1}{t}) \cdot e^{-\frac{x}{t}}$

$f_t{}'(x) = e^{-\frac{x}{t}} \cdot \left(t + (tx + t^2) \cdot (-\frac{1}{t}) \right)$

$f_t{}'(x) = e^{-\frac{x}{t}} \cdot \left(t - \frac{tx}{t} - \frac{t^2}{t} \right) = e^{-\frac{x}{t}} \cdot (t - x - t) = e^{-\frac{x}{t}} \cdot (-x)$

24) $\quad f_t(x) = (x^2 - \frac{2}{t} \cdot x) \cdot e^{tx}$

$$f_t{}'(x) = (2x - \frac{2}{t}) \cdot e^{tx} + (x^2 - \frac{2}{t} \cdot x) \cdot t \cdot e^{tx}$$

$$f_t{}'(x) = e^{tx} \cdot (2x - \frac{2}{t} + tx^2 - 2x)$$

$$f_t'(x) = e^{tx} \cdot (-\frac{2}{t} + tx^2)$$

$$f_t{}''(x) = t \cdot e^{tx} \cdot (-\frac{2}{t} + tx^2) + e^{tx} \cdot (2tx)$$

$$f_t{}''(x) = e^{tx} \cdot (-2 + t^2 \cdot x^2 + 2tx)$$

25) $\quad f_a(x) = 10x \cdot e^{-ax^2}$

$$f_a{}'(x) = 10 \cdot e^{-ax^2} + 10x \cdot (-2ax) \cdot e^{-ax^2}$$

$$f_a{}'(x) = e^{-ax^2} \cdot (10 + (-20ax^2))$$

$$f_a{}'(x) = e^{-ax^2} \cdot (10 - 20ax^2)$$

$$f_a{}''(x) = (-2ax) \cdot e^{-ax^2} \cdot (10 - 20ax^2) + e^{-ax^2} \cdot (-40ax)$$

$$f_a{}''(x) = -20ax \cdot e^{-ax^2} + 40a^2 \cdot x^3 \cdot e^{-ax^2} - 40ax \cdot e^{-ax^2}$$

$$f_a{}''(x) = e^{-ax^2} \cdot (-20ax + 40a^2 \cdot x^3 - 40ax)$$

$$f_a{}''(x) = e^{-ax^2} \cdot (-60ax + 40a^2 \cdot x^3)$$

$$f_a{}'''(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2} \cdot (-60ax + 40a^2x^3) + e^{-ax^2} \cdot (-60a + 120a^2x^2)$$

$$f_a{}'''(x) = e^{-ax^2} \cdot (120a^2 \cdot x^2 - 80a^3 \cdot x^4 - 60a + 120a^2 \cdot x^2)$$

$$f_a{}'''(x) = e^{-ax^2} \cdot (240a^2 \cdot x^2 - 80a^3 \cdot x^4 - 60a)$$

26) $f(x) = \dfrac{2 \cdot e^x - 4}{e^x + 1}$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^x \cdot (e^x + 1) - (2 \cdot e^x - 4) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} + 2 \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6 \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6 \cdot e^x \cdot (e^x + 1)^2 - 6 \cdot e^x \cdot 2 \cdot (e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{6 \cdot e^{2x} + 6 \cdot e^x - 12 \cdot e^{2x}}{(e^x + 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-6 \cdot e^{2x} + 6 \cdot e^x}{(e^x + 1)^3}$$

27) $f_k(x) = \dfrac{2 \cdot e^x}{e^x - k}$

$$f_k{}'(x) = \frac{2 \cdot e^x \cdot (e^x - k) - 2 \cdot e^x \cdot e^x}{(e^x - k)^2}$$

$$f_k{}'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} - 2k \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}}{(e^x - k)^2}$$

$$f_k{}'(x) = \frac{-2k \cdot e^x}{(e^x - k)^2}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{-2k \cdot e^x \cdot (e^x - k)^2 - (-2k \cdot e^x) \cdot 2 \cdot (e^x - k) \cdot e^x}{(e^x - k)^4}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{-2k \cdot e^{2x} + 2k^2 \cdot e^x + 4k \cdot e^{2x}}{(e^x - k)^3}$$

$$f_k{}''(x) = \frac{2k \cdot e^{2x} + 2k^2 \cdot e^x}{(e^x - k)^3}$$

28) $f_t(x) = \dfrac{e^x - t}{e^x + t}$

$$f_t{}'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + t) - (e^x - t) \cdot e^x}{(e^x + t)^2}$$

$$f_t{}'(x) = \frac{e^{2x} + t \cdot e^x - e^{2x} + t \cdot e^x}{(e^x + t)^2}$$

$$f_t{}'(x) = \frac{2t \cdot e^x}{(e^x + t)^2}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{2t \cdot e^x \cdot (e^x + t)^2 - 2t \cdot e^x \cdot 2(e^x + t) \cdot e^x}{(e^x + t)^4}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{2t \cdot e^{2x} + 2t^2 \cdot e^x - 4t \cdot e^{2x}}{(e^x + t)^3}$$

$$f_t{}''(x) = \frac{2t^2 \cdot e^x - 2t \cdot e^{2x}}{(e^x + t)^3}$$

29) $f_a(x) = e^x \cdot \left(\dfrac{ax + 1}{ax^3}\right)$

$$f_a{}'(x) = e^x \cdot \left(\frac{ax + 1}{ax^3}\right) + e^x \cdot \left(\frac{a^2x^3 - 3a^2x^3 - 3ax^2}{a^2x^6}\right)$$

$$f_a{}'(x) = e^x \cdot \left(\frac{ax + 1}{ax^3}\right) + e^x \cdot \left(\frac{-2a^2x^3 - 3ax^2}{a^2x^6}\right)$$

$$f_a{}'(x) = \frac{e^x \cdot (ax + 1)}{ax^3} + \frac{e^x \cdot (-2a^2x^3 - 3ax^2)}{a^2x^6}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{ax^3 \cdot (e^x \cdot (ax + 1) + e^x \cdot (-2a^2x^3 - 3ax^2))}{a^2x^6}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{ax^3 \cdot (ax \cdot e^x + e^x) - 2a^2x^3 \cdot e^x - 3ax^2 \cdot e^x}{a^2x^6}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{a^2x^4 \cdot e^x + ax^3 \cdot e^x - 2a^2x^3 \cdot e^x - 3ax^2 \cdot e^x}{a^2x^6}$$

$$f_a{}'(x) = e^x \cdot \left(\frac{a^2x^4 + ax^3 - 2a^2x^3 - 3ax^2}{a^2x^6}\right)$$

$$f_a{}'(x) = e^x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{ax^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{ax^4}\right)$$

Man kann sich diesen kompletten Weg sparen, ja ganz richtig jetzt denken sicherlich welche "boa warum macht der das nicht früher" Nun ja sowas passiert, wenn man nicht richtig guckt, genau deswegen habe ich auch dieses Beispiel gewählt

2.Weg:

$$f_a(x) = e^x \cdot \left(\frac{ax+1}{ax^3}\right) \Longrightarrow e^x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{ax^3}\right)$$

$$f_a{}'(x) = e^x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{ax^3}\right) + e^x \cdot \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{3}{ax^4}\right)$$

$$f_a{}'(x) = e^x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{ax^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{ax^4}\right)$$

und siehe da schon haben wir viele Nerven gespart, denn das Ergebnis deckt sich mit dem von da oben.

Merke: Immer schauen ob man die gegebene Funktion vereinfachen kann

30) $f_a(x) = x \cdot e^{-ax^2+1}$

$$f_a{}'(x) = 1 \cdot e^{-ax^2+1} + x \cdot (-2ax \cdot e^{-ax^2+1})$$

$$f_a{}'(x) = e^{-ax^2+1} \cdot (1 - 2ax^2)$$

$$f_a{}''(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2+1} \cdot (1 - 2ax^2) + e^{-ax^2+1} \cdot (-4ax)$$

$$f_a{}''(x) = e^{-ax^2+1} \cdot (-2ax + 4a^2x^3 - 4ax)$$

$$f_a{}''(x) = e^{-ax^2+1} \cdot (-6ax + 4a^2x^3)$$

$$f_a{}'''(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2+1} \cdot (-6ax + 4a^2x^3) + e^{-ax^2+1} \cdot (-6a + 12a^2x^2)$$

$$f_a{}'''(x) = e^{-ax^2+1} \cdot (12a^2x^2 - 8a^3x^4 - 6a + 12a^2x^2)$$

$$f_a{}'''(x) = e^{-ax^2+1} \cdot (24a^2x^2 - 8a^3x^4 - 6a)$$

Ein weiterer Abschnitt ist geschafft.
Kommen wir zu den Logarithmusfunktionen

4) Logarithmusfunktionen:

Die Rechenregeln für Logarithmen, da man diese in der Schule oft braucht:

$ln(u \cdot v) = ln(u) + ln(v)$

$ln(\frac{u}{v}) = ln(u) - ln(v)$

$ln(u^k) = k \cdot ln(u)$

$y = ln(x) \Longleftrightarrow x = e^y$

$f(x) = ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

31) $f(x) = ln(2x-4)$

$$f'(x) = \frac{1}{2x-4} \cdot 2 = \frac{2}{(2x-4)}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (2x-4) - 2 \cdot 2}{(2x-4)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(2x-4)^2}$$

32) $f(x) = x^2 \cdot ln(1-x)$

$$f'(x) = 2x \cdot ln(1-x) + x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = 2x \cdot ln(1-x) - \frac{x^2}{1-x}$$

33) $f(x) = ln(6x - x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{(6x-x^2)} \cdot (6-2x) = \frac{6-2x}{6x-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (6x-x^2) - (6-2x) \cdot (6-2x)}{(6x-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-12x + 2x^2 - (36 - 12x - 12x + 4x^2)}{(6x-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-12x + 2x^2 - 36 + 12x + 12x - 4x^2}{(6x-x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 12x - 36}{(6x-x^2)^2}$$

34) $f_a(x) = ln(x) \cdot (x-a)$

$$f_a{}'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x-a) + ln(x) \cdot 1$$

$$f_a{}'(x) = \frac{x-a}{x} + ln(x) = 1 - \frac{a}{x} + ln(x)$$

$$f_a{}''(x) = 0 + \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$f_a{}''(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{a+x}{x^2}$$

35) $f(x) = x \cdot ln(x-4)$

$$f_a{}'(x) = 1 \cdot ln(x-4) + x \cdot \frac{1}{x-4} \cdot 1$$

$$f'(x) = ln(x-4) + \frac{x}{x-4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1 \cdot (x-4) - x \cdot 1}{(x-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-4)} + \frac{x-4-x}{(x-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{4}{(x-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{x-8}{(x-4)^2}$$

36) $f(x) = ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \left(\frac{2x^3 - 2x^3 + 8x}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \left(\frac{8x}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \left(\frac{8}{x^3}\right) = \frac{8x^2}{(x^2-4) \cdot x^3}$$

$$f'(x) = \frac{8}{x \cdot (x^2-4)}$$

Das war ein Beispiel ohne das Anwenden der Logarithmusgesetze. jetzt folgt eines mit:

$f(x) = ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)$ Gesetz anwenden: $ln\left(\frac{u}{v}\right) = ln(u) - ln(v)$

$f(x) = ln(x^2-4) - ln(x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2-4)} \cdot 2x - \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{2x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-4)}{x^2-4} = \frac{8}{x(x^2-4)}$$

$$f'(x) = \frac{8}{x(x^2-4)} \quad \Longrightarrow f'(x) = \frac{8}{x^3-4x}$$

Für die zweite Ableitung folgt dann:

$$f''(x) = \frac{0\cdot(x^3-4x) - 8\cdot(3x^2-4)}{(x^3-4x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-24x^2+32}{(x^3-4x)^2}$$

37) $f_a(x) = ln\left(\frac{1}{ax+b}\right) \quad a, b \neq 0 \in \mathbb{R}$

$$f_a{}'(x) = ln(1) - ln(ax+b)$$

$$f_a{}'(x) = 0 - \frac{1}{ax+b} \cdot a$$

$$f_a{}'(x) = -\frac{a}{ax+b}$$

$$f_a{}''(x) = -\frac{0\cdot(ax+b) - a\cdot a}{(ax+b)^2}$$

$$f_a{}''(x) = \frac{a^2}{(ax+b)^2}$$

38) $f(x) = ln(3+x) - ln(3-x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3+x} \cdot 1 - \frac{1}{(3-x)} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}$$

$$f'(x) = \frac{(3-x)+(3+x)}{(3+x)\cdot(3-x)}$$

$$f'(x) = \frac{6}{9-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (9-x^2) - 6 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{12x}{(9-x^2)^2}$$

oder mit Kettenregel:

$$f'(x) = 6 \cdot (9-x^2)^{-1}$$

$$f''(x) = 6 \cdot (-1) \cdot (9-x^2)^{-2} \cdot (-2x)$$

$$f''(x) = 12x \cdot (9-x^2)^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{12x}{(9-x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{12 \cdot (9-x^2)^2 - 12x \cdot 2 \cdot (9-x^2) \cdot (-2x)}{(9-x^2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{12 \cdot (9-x^2) - 12x \cdot 2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{108 - 12x^2 + 48x^2}{(9-x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{36x^2 + 108}{(9-x^2)^3}$$

39) $f_a(x) = x \cdot ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$

$$f_a{}'(x) = ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + x \cdot \frac{a}{x^2} \cdot \left(\frac{2x}{a^2}\right)$$

$$f_a{}'(x) = ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + \frac{a}{x} \cdot \frac{2x}{a}$$

$$f_a{}'(x) = ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + \frac{2xa}{ax}$$

$$f_a{}'(x) = ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2$$

Auf dasselbe Ergebnis kommt ihr auch mit den Log-Gesetzen(siehe oben)

40) $f(x) = \frac{2 + ln(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (2 + ln(x)) \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2}{x} - (2 + ln(x)) \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - (2 + ln(x)) \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x \cdot (2 + ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \cdot (2 + ln(x))}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 4 - 2 \cdot ln(x)}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-3 - 2 \cdot ln(x)}{x^3}$$

Das war der vorletzte Teil meines Artikels.
Zum Schluss betrachten wir noch die *Wurzelfunktionen*.

4) Wurzelfunktionen:

Wurzelfunktionen wie etwa f mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ sind spezielle Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten.
Sie sind für negative Zahlen in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert, da der Radikand (Wurzel) dort nicht negativ sein darf.
Dadurch kann es bei dieser Funktionsart oft Intervalle geben, in denen die Funktion nicht definiert ist. Besonders kritisch zu betrachten sind die Randpunkte des Definitionsbereiches, wenn solche Intervalle vorkommen.
Hier ist die Funktion nicht differenzierbar und muss insofern gesondert auf das Vorliegen von Extremstellen untersucht werden.

Potenzregel der Ableitung:

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Merke: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{16} = 4$

41) $f(x) = (x-5) \cdot \sqrt{x}$

$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + (x-5) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + (x-5) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-5}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot 2 \cdot \sqrt{x} + (x-5)}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{2x + (x-5)}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3x-5}{2 \cdot \sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad u = 3x - 5 \qquad u' = 3$

$v = 2 \cdot \sqrt{x} \qquad v' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$v' = 0 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} - (3x-5) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2 \cdot \sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} - \frac{3x-5}{\sqrt{x}}}{(2 \cdot \sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{6 \cdot \sqrt{x} - \frac{3x-5}{\sqrt{x}}}{(2 \cdot \sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{6x-(3x-5)}{\sqrt{x}}}{(2 \cdot \sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{3x+5}{\sqrt{x}}}{(2 \cdot \sqrt{x})^2}$$

Bei Ableitungen von Wurzelfunktionen spielt das Erweitern eine große Rolle, denn ohne wird es zu komliziert und die Übersicht geht dabei auch verloren.

Achtung: $\quad \frac{\frac{n}{m}}{p} = \frac{n}{m \cdot p} \quad$ wobei $\quad n, p, m \in \mathbb{R}$ und $m, p \neq 0$

z.b: $\quad \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

also: $\quad \frac{\frac{3x+5}{\sqrt{x}}}{(2 \cdot \sqrt{x})^2} = \frac{3x+5}{\sqrt{x} \cdot (2 \cdot \sqrt{x})^2}$

$$\Longrightarrow f''(x) = \frac{3x+5}{\sqrt{x} \cdot (2 \cdot \sqrt{x})^2}$$

$$\sqrt{x} \cdot (2 \cdot \sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot 2^2 \cdot (\sqrt{x})^2 = 4x \cdot \sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow f''(x) = \frac{3x+5}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

42) $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{1} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1) + x}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x+2}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x+1} - (3x+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{x+1} - \left(\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\right)}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{6 \cdot \sqrt{x+1} - \left(\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\right)}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2}$$

Jetzt beseitigt man den Doppelbruch, indem man mit dem Nenner der im Zähler stehenden Bruches erweitert.Dieses Verfahren verwende ich auch bei den anderen Ableitungen..

$$f''(x) = \frac{\frac{6 \cdot (\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}) - (3x+2)}{\sqrt{x+1}}}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{6 \cdot (x+1) - (3x+2)}{\sqrt{x+1}}}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{6x+6-3x-2}{\sqrt{x+1}}}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}}}{(2 \cdot \sqrt{x+1})^2} = \frac{3x+4}{4 \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

43) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$

1.Weg(mit Kettenregel):

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x}} \Longrightarrow f(x) = 4 \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (2-x)^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot (-1)$$

$$f'(x) = 2 \cdot (2-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{(\sqrt{2-x})^3}$$

2.Weg(Quotienten- und Kettenregel):

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \sqrt{2-x} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)}{(\sqrt{2-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x} \cdot (\sqrt{2-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(\sqrt{2-x})^3}$$

44) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x} - (x^2-4) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^2-4}{2 \cdot \sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+4}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+4}{2 \cdot (\sqrt{x})^3} \qquad \text{oder} \qquad f'(x) = \frac{3x^2-4}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

45) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+25}$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2+25} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+25)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+25} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+25}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+25+x^2}{\sqrt{x^2+25}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+25}{\sqrt{x^2+25}}$$

$$f''(x) = \frac{4x \cdot \sqrt{x^2+25} - \left(\frac{2x^3+25x}{\sqrt{x^2+25}}\right)}{(\sqrt{x^2+25})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{4x \cdot (x^2+25) - 2x^3 - 25x}{\sqrt{x^2+25}}}{(\sqrt{x^2+25})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{4x^3+100x-2x^3-25x}{\sqrt{x^2+25}}}{(\sqrt{x^2+25})^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3+75x}{\sqrt{x^2+25} \cdot \sqrt{x^2+25}^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3+75x}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}$$

46) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+8}}$

$$f'(x) = \frac{4 \cdot \sqrt{x^2+8} - 4x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}}{(\sqrt{x^2+8})^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \cdot \sqrt{x^2+8} - \left(\frac{4x^2}{\sqrt{x^2+8}}\right)}{\sqrt{x^2+8}^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4 \cdot (x^2+8) - 4x^2}{\sqrt{x^2+8}}}{\sqrt{x^2+8}^2}$$

$$f'(x) = \frac{32}{\sqrt{x^2+8}^3}$$

47) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot (x+1) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\cdot\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1-2x}{2\cdot\sqrt{x}}}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$$

48) $f_a(x) = 3xa \cdot \sqrt{x+1}$

$$f_a{}'(x) = 3a \cdot \sqrt{x+1} + 3xa \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}$$

$$f_a{}'(x) = 3a \cdot \sqrt{x+1} + \frac{3xa}{2\cdot\sqrt{x+1}}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{3a \cdot \sqrt{x+1} \cdot 2 \cdot \sqrt{x+1} + 3xa}{2\cdot\sqrt{x+1}}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{6a \cdot (x+1) + 3xa}{2\cdot\sqrt{x+1}}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{9ax + 6a}{2\cdot\sqrt{x+1}}$$

49) $f_k(x) = x \cdot \sqrt{k-2x}$

$$f_k{}'(x) = 1 \cdot \sqrt{k-2x} + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{k-2x}}\right)$$

$$f_k{}'(x) = \sqrt{k-2x} - \frac{x}{\sqrt{k-2x}}$$

$$f_k{}'(x) = \frac{(k-2x) - x}{\sqrt{k-2x}}$$

$$f_k{}'(x) = \frac{k-3x}{\sqrt{k-2x}}$$

$$f_k''(x) = \frac{-3 \cdot \sqrt{k-2x} - (k-3x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{k-2x}}\right)}{(\sqrt{k-2x})^2}$$

$$f_k''(x) = \frac{-3 \cdot \sqrt{k-2x} - \left(-\frac{k-3x}{\sqrt{k-2x}}\right)}{(\sqrt{k-2x})^2}$$

$$f_k''(x) = \frac{-3 \cdot (k-2x) + k - 3x}{(\sqrt{k-2x})^3}$$

$$f_k''(x) = \frac{-3k + 6x + k - 3x}{(\sqrt{k-2x})^3}$$

$$f_k''(x) = \frac{3x - 2k}{(\sqrt{k-2x})^3}$$

50) $f(x) = x \cdot \sqrt{16 - x^2}$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{16-x^2} + x \cdot \left(-2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}}\right)$$

$$f'(x) = \sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(16-x^2) - x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$